Formel von Binet (Beweis mit Linearer Algebra)

Die Folge der *Fibonacci*-Zahlen $(f_n)_{n\geq 0}$ wird rekursiv definiert durch

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{mit} \quad f_0 = 0, \quad f_1 = 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq 1.$$

Fügt man zu dieser Formel die Gleichung $f_n = f_n$ hinzu, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + f_{n-1} \\ f_n &= f_n \end{aligned},$$

das sich in Matrixschreibweise darstellen lässt:

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Man setzt

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und kann damit schreiben

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= A \cdot A \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} \\ &= A^2 \cdot A \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{pmatrix} = A^3 \begin{pmatrix} f_{n-2} \\ f_{n-3} \end{pmatrix} \\ &= \ldots.. \\ &= A^n \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} \\ &= A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das heißt, f_n und f_{n+1} ließen sich bei Kenntnis von A^n aus dem Anfangsvektor

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

berechnen. Gesucht wird also eine Darstellung der n-ten Potenz von A für beliebiges $n \geq 0$.

Die n-te Potenz einer Matrix erhält man in einfacher Weise, wenn die Matrix diagonalisierbar ist. In diesem Fall potenziert man die zugehörige Diagonalmatrix. Dazu erhebt man deren Diagonalelemente (einzeln) in die n-te Potenz. Die ursprüngliche Matrix wird durch eine geeignete Transformation in die Diagonalform gebracht, die potenzierte Diagonalmatrix zurücktransformiert.

Es stellt sich heraus (weiter unten), dass A in der Tat diagonalisierbar ist. Wir greifen also in die Trickkiste der Linearen Algebra und werden formal: Sei D die Diagonalform von A, dann existiert eine Matrix S (die Transformationsmatrix), so dass gilt

$$D = S^{-1} A\, S \;.$$

Die n-te Potenz von A ist dann gegeben durch

$$A^n = S\, D^n\, S^{-1} \;.$$

Damit ist die Matrix S unser Problem. Die Lineare Algebra sagt, sie setzt sich zusammen aus den *Eigenvektoren* von A, spaltenweise nebeneinander geschrieben.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren berechnen wir zunächst die *Eigenwerte* von A. Das charakteristische Polynom ist

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) &= \det(A - \lambda E) \\ &= \det\left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right] \\ &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(1 - \lambda) - 1 \end{aligned} \;.$$

Darin bezeichnet E die 2×2-Einheitsmatrix und *det* steht für *Determinante*. Die Eigenwerte sind die Nullstellen von $\chi(\lambda)$, also

$$\begin{aligned} \lambda(1 - \lambda) + 1 &= 0 \\ \lambda^2 - \lambda - 1 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned} \;.$$

Zur Abkürzung setzen wir

$$\varphi := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \,,$$

diese Lösung ist die Zahl des *Goldenen Schnitts* (φ = 1,618…). Die zweite Lösung ist

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \;.$$

Damit sind die Eigenwerte von A

$$\lambda_1 = \varphi, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\varphi} \;.$$

Wir prüfen im Nachhinein, ob das charakteristische Polynom auch vollständig in

Linearfaktoren zerlegbar ist – und zwar in genau die Linearfaktoren, die diesen Eigenwerten entsprechen:

$$
\begin{aligned}
(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 \\
&= \lambda^2 - (\varphi - \frac{1}{\varphi})\lambda - \varphi\frac{1}{\varphi} \\
&= \lambda^2 - \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi}\lambda - 1 \qquad . \\
&= \lambda^2 - \frac{(1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4)/4}{(1 + \sqrt{5})/2}\lambda - 1 \\
&= \lambda^2 - \lambda - 1
\end{aligned}
$$

Die Rechnung zeigt, dass dies der Fall ist. Außerdem sehen wir, dass die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von einfacher (algebraischer) Vielfachheit sind.

Zur Bestimmung der *Eigenvektoren* v_1 und v_2 lösen wir das Gleichungssystem

$$A v_{1,2} = \lambda_{1,2} v_{1,2} ,$$

also

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_{1,2} = \lambda_{1,2} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}_{1,2} ,$$

mit v_x und v_y als Komponenten von v. Für den Eigenwert $\lambda_1 = \varphi$ lautet es

$$
\begin{aligned}
v_x + v_y &= \varphi v_x \\
v_x &= \varphi v_y
\end{aligned} .
$$

Wir setzen $v_y = \frac{1}{\varphi} v_x$ aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung ein und erhalten

$$v_x (1 + \frac{1}{\varphi} - \varphi) = 0 .$$

Da der Term in der Klammer Null ist ($1 + 1/\varphi = \varphi$), kann v_x jeden Wert aus $\boldsymbol{R}$ annehmen. Wir wählen $v_x = 1$ und erhalten damit $v_y = 1/\varphi$. Der zu $\lambda_1 = \varphi$ gehörende Eigenvektor ist also

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\varphi \end{pmatrix}$$

und der entsprechende Eigenvektorraum E_A

$$E_A(\lambda_1 = \varphi) = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\varphi \end{pmatrix} \middle| \, t \in R \right\} .$$

Im Fall des Eigenwertes $\lambda_2 = -1/\varphi$ lautet das Gleichungssystem

$$\begin{array}{lcl} v_x + v_y &=& -(1/\varphi)v_x \\ v_x &=& -(1/\varphi)v_y \end{array}.$$

Auch hier erhalten wir

$$v_x(1 + \frac{1}{\varphi} - \varphi) = 0$$

mit dem Wert Null für die Klammer. Wir wählen daher wiederum $v_x = 1$, woraus $v_y = -\varphi$ folgt. Der zu $\lambda_2 = -1/\varphi$ gehörende Eigenvektor ist also

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \end{pmatrix}$$

und der entsprechende Eigenvektorraum

$$E_A(\lambda_2 = -1/\varphi) = \left\{ t\begin{pmatrix} 1 \\ -\varphi \end{pmatrix} \middle| \, t \in R \right\}.$$

Damit haben wir folgende Sachlage: Beide Eigenvektorräume sind eindimensional, und die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind (siehe oben) von einfacher Vielfachheit. Die Lineare Algebra sagt, ein hinreichendes Kriterium dafür, dass A diagonalisierbar ist.

Für die Transformationsmatrix erhalten wir

$$S = (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\varphi & -\varphi \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der inversen Matrix S^{-1} bilden wir zunächst die Determinante von S,

$$\det(S) = -\varphi - \frac{1}{\varphi} = -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) = -\sqrt{5}.$$

Damit wird

$$S^{-1} = \frac{1}{\det(S)} \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -1/\varphi & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -1/\varphi & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Diagonalmatrix ist dann

$$\begin{aligned} D = S^{-1}AS &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -1/\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\varphi & -\varphi \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -1/\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+1/\varphi & 1-\varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi - 2 & -\varphi + \varphi^2 - 1 \\ -1/\varphi - (1/\varphi)^2 + 1 & -1/\varphi + 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Nebendiagonalelemente dieser Matrix sind Null (einfache Rechenübung). Die Elemente in der Hauptdiagonale lassen sich umformen:

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\varphi + 2}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1/\varphi - 2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}+4}{2\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\dfrac{2}{1+\sqrt{5}} - \dfrac{2+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{5}\left(1+\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\dfrac{-2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & -1/\varphi \end{pmatrix}$$

Dieses Ergebnis überrascht uns nicht. Denn die (Diagonal-)Elemente einer Diagonalmatrix sind ihre Eigenwerte.

Wir sind jetzt (endlich) in der Lage, die Matrix A^n auf den Anfangsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ anzuwenden:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= S\,D^n S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= S\,D^n \begin{pmatrix} -\varphi & -1 \\ -1/\varphi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\, S\,D^n \begin{pmatrix} -\varphi \\ -1/\varphi \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\, S \begin{pmatrix} \varphi^n & 0 \\ 0 & -\left(1/\varphi\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi \\ -1/\varphi \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}}\, S \begin{pmatrix} -\varphi^{n+1} \\ \left(-1/\varphi\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/\varphi & -\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi^{n+1} \\ \left(-1/\varphi\right)^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\varphi^{n+1} + \left(-1/\varphi\right)^{n+1} \\ -\varphi^n + \left(-1/\varphi\right)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus der untersten Zeile liest man unmittelbar ab

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - (-1/\varphi)^n\right] .$$

Mit

$$\varphi^n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ und } (-1/\varphi)^n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

folgt schließlich

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

die Formel von *Binet*.

Literatur

Die obigen Zeilen sind im Wesentlichen dem Abschnitt 3.3 des Vortragsmanuskripts *Diagonalisieren* von *Nikolai Nowaczyk* und *Lars Wallenborn* entnommen (eine Art Ausarbeitung dieses Abschnitts, die Bezeichnungen wurden z. T. geändert): https://www.yumpu.com/de/document/view/13334150/vortrag-diagonalisieren-lars-a-wallenborn.