Zeige: Der Quotient aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen $q(n) = f(n+1)/f(n)$ strebt für $n \to \infty$ gegen die Zahl $\phi = (1+\sqrt{5})/2$, dem Teilungsverhältnis des Goldenen Schnitts.

Beweis: Die Fibonacci-Folge ist definiert durch die Rekursionsgleichung

(1) $$f(n+1) = f(n) + f(n-1).$$

Daraus folgt

(2) $$\begin{aligned} q(n) &= \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{f(n) + f(n-1)}{f(n)} = 1 + \frac{f(n-1)}{f(n)} \\ &= 1 + \frac{1}{q(n-1)} \end{aligned}.$$

Für die Zahl ϕ gilt

$$\phi^2 = \phi + 1$$

oder, nach Division durch ϕ,

(3) $$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Damit lässt sich der Abstand des n-ten Quotienten $q(n)$ vom Grenzwert ϕ schreiben als

$$\left|q(n) - \phi\right| = \left|\left(1 + \frac{1}{q(n-1)}\right) - \left(1 + \frac{1}{\phi}\right)\right|.$$

Der Term auf der rechten Seite wird umgeformt:

$$\begin{aligned} &= \left|\frac{1}{q(n-1)} - \frac{1}{\phi}\right| \\ &= \left|\frac{\phi - q(n-1)}{\phi\, q(n-1)}\right| \\ &= \left|\frac{1}{\phi}\frac{\phi - q(n-1)}{q(n-1)}\right| \\ &= \frac{1}{\phi}\left|\frac{\phi - q(n-1)}{q(n-1)}\right| \end{aligned}.$$

Der Nenner $q(n-1)$ des Bruchs auf der rechten Seite ist für alle n größer oder gleich 1. Das heißt, die rechte Seite ist für alle n kleiner oder gleich

$$\frac{1}{\phi}\left|\phi - q(n-1)\right|.$$

Daher gilt die Ungleichung

(4) $$\left|q(n) - \phi\right| \le \frac{1}{\phi}\left|\phi - q(n-1)\right| = \frac{1}{\phi}\left|q(n-1) - \phi\right|.$$

Das heißt, der Abstand des n-ten Quotienten vom Grenzwert ϕ ist mindestens um den Faktor $1/\phi$ kleiner oder gleich dem Abstand des vorherigen Quotienten. Es ist also

$$|q(n) - \phi| \leq \frac{1}{\phi}|q(n-1) - \phi|$$

$$|q(n-1) - \phi| \leq \frac{1}{\phi}|q(n-2) - \phi|$$

$$|q(n-2) - \phi| \leq \frac{1}{\phi}|q(n-3) - \phi| \quad usw.$$

Führt man diesen Regress bis zum Abstand

$$|q(1) - \phi|$$

des ersten Quotienten aus, erhält man

(5) $$|q(n) - \phi| \leq \left(\frac{1}{\phi}\right)^{n-1} |q(1) - \phi| \,.$$

Da $|q(1) - \phi|$ eine Konstante ist und $1/\phi \leq 1$, geht die rechte Seite, und damit der Abstand des Quotienten $q(n)$ von ϕ, für $n \to \infty$ gegen Null.

Die Folge der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen strebt also für $n \to \infty$ gegen die Zahl ϕ des Goldenen Schnitts,

(6) $$\lim_{n \to \infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \phi$$

Qed.