

## Eigenschwingungen eines konischen Horns

---

### 1. Theorie

Der Luftdruck  $p$  in einem schlanken, zylindersymmetrischen Rohr genügt nach Webster<sup>1</sup> der Gleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{d(\ln S)}{dx} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} .$$

(Webster's Hornsgleichung<sup>2</sup>). Dabei wird mit  $p$ , um genau zu sein, die Differenz gegenüber dem Außendruck bezeichnet. Die Koordinate  $x$  misst, von einem Bezugspunkt aus gezählt, die Entfernung längs der Achse des Rohrs. Die Größe  $c$  ist die Schallgeschwindigkeit in Luft ( $c = 344$  m/s bei Normaldruck und 20° C), und  $S$  die Querschnittsfläche des Rohrs. Diese Fläche ist in der Regel eine Funktion von  $x$ . Für ein konisches Rohr gilt z. B.

$$(2) \quad S(x) = s x^2 .$$

Für nicht zu große Öffnungen ist  $s$  näherungsweise der Raumwinkel, der durch den Konus des Rohrs überstrichen wird. Das konische Rohr wird seiner Form entsprechend *konisches Horn* genannt, ein Rohr mit exponentiell ansteigender Querschnittsfläche *Exponentialhorn*. Ist  $S$  konstant, handelt es sich um eine zylindrische *Pfeife* (z. B. eine Orgelpfeife).

Die Luftmoleküle im Innern des Horns lassen sich zu Schwingungen anregen. Das führt dort zu Druck- und Dichteverteilungen in der Form stehender Wellen, deren Frequenzen (Eigenfrequenzen) durch die Randbedingungen bestimmt werden. Websters Gleichung setzt voraus, dass diese Wellen im Rohr ebene Wellenfronten bilden. Dies trifft im Fall der zylindrischen Pfeife zu, gilt aber nicht für das konische Horn und Exponentialhorn, deren Querschnittsfläche mit  $x$  variiert.

Im Folgenden betrachten wir ausschließlich das konische Horn. In diesem breiten sich Kugelwellen aus, deren Wellenfronten auf der Wand des Horns senkrecht stehen. Handelt es sich um ein langgestrecktes Horn, ist der Öffnungswinkel des Konus klein, so dass die Wellenfronten, auch wenn sie senkrecht auf die Wand treffen, näherungsweise eben sind. Wir setzen diese Näherung voraus, so dass wir Gleichung (1) benutzen dürfen. Mit

$$(3) \quad \frac{d(\ln S)}{dx} = \frac{d(\ln(sx^2))}{d(sx^2)} \frac{d(sx^2)}{dx} = \frac{1}{sx^2} 2sx = \frac{2}{x}$$

erhalten wir

$$(4) \quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} .$$

Wie üblich setzen wir für  $p$  eine harmonische Zeitabhängigkeit mit der Frequenz  $f = \omega/2\pi$  voraus, so dass  $p(x, t)$  in das Produkt

$$(5) \quad p(x, t) = p(x) \cdot \exp(i\omega t)$$

zerlegt wird. Das führt zu

$$(6) \quad \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d p(x)}{dx} = -\frac{\omega^2}{c^2} p(x) .$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind Kugelwellen

$$(7) \quad p(x) = \frac{1}{x} [A \exp(-ikx) + B \exp(ikx)]$$

mit

$$(8) \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$  werden durch die Randbedingungen festgelegt. In unserem Fall sei das Horn am schmalen Ende abgeschlossen und am weiten Ende offen. Wir legen den Nullpunkt der  $x$ -Koordinate in den Scheitelpunkt des Hornkonus und das geschlossene Ende an die Stelle  $x = x_1$ . Die Länge des Horns sei  $L$ , so dass sich das offene Ende an der Stelle  $x = x_1 + L$  befindet. Bezeichnet man die Radien des Horns am schmalen Ende mit  $r$  und am weiten Ende mit  $R$  (Abbildung 1), gilt

$$(9) \quad x_1 = \frac{1}{\frac{R}{r} - 1} L.$$

Die Eigenfrequenzen  $f$  ergeben sich aus den folgenden Bedingungen: Am geschlossenen Ende ( $x = x_1$ ) bewegen sich die Moleküle nicht, so dass dort ein Schwingungsbauch der Druckverteilung

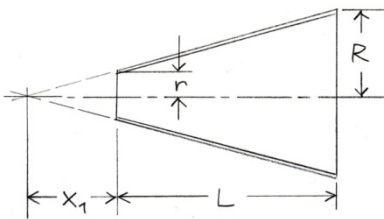


Abbildung 1 Bezeichnungen der Maße des konischen Horns

existiert, also  $dp(x)/dx = 0$  gilt. Am offenen Ende ( $x = x_1 + L$ ) ist der Druck gleich dem Außendruck, also ist dort  $p = 0$ .

Da am geschlossenen Ende  $dp(x)/dx$  von Bedeutung ist, leiten wir den Term auf der rechten Seite von Gleichung (7) nach  $x$  ab:

$$(10) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{A}{x} \exp(-ikx) \left[ -ik - \frac{1}{x} \right] + \frac{B}{x} \exp(ikx) \left[ ik - \frac{1}{x} \right].$$

Er soll an der Stelle  $x_1$  verschwinden, also folgt

$$(11) \quad \frac{A}{x} \exp(-ikx_1) \left[ ik + \frac{1}{x_1} \right] = \frac{B}{x} \exp(ikx_1) \left[ ik - \frac{1}{x_1} \right].$$

An der Stelle  $x = x_1 + L$  ist der Druck Null, also folgt nach Gleichung (7) weiterhin

$$(12) \quad A \exp[-ik(x_1 + L)] = -B \exp[ik(x_1 + L)].$$

Dividiert man Gleichung (11) durch Gleichung (12), erhält man

$$\frac{\exp(-ikx_1) \left( ik + \frac{1}{x_1} \right)}{\exp(-ikx_1 - ikL)} = - \frac{\exp(ikx_1) \left( ik - \frac{1}{x_1} \right)}{\exp(ikx_1 + ikL)}$$

und damit

$$\exp(ikL) \left( ik + \frac{1}{x_1} \right) = -\exp(-ikL) \left( ik - \frac{1}{x_1} \right).$$

Das wird umgeformt zu

$$[\exp(ikL) + \exp(-ikL)] ik = - [\exp(ikL) - \exp(-ikL)] \frac{1}{x_1}$$

$$\frac{\exp(ikL) + \exp(-ikL)}{\exp(ikL) - \exp(-ikL)} ik = -\frac{1}{x_1}$$

$$\frac{2 \cos(kL) ik}{2i \sin(kL)} = -\frac{1}{x_1}$$

oder

$$(14) \quad \tan(kL) = -\frac{x_1}{L}(kL).$$

Dies ist eine transzendente Gleichung in der Variablen  $kL$ , deren Lösungen

$$(15) \quad k_n L = \frac{2\pi L f_n}{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sich graphisch veranschaulichen lassen (Abbildung 2). Dazu trägt man die Funktion  $\tan(kL)$  in Abhängigkeit von  $kL$  auf und bestimmt deren Schnittpunkte mit der Geraden  $-(x_1/L)(kL)$ . Die

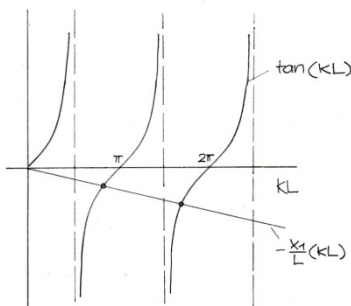


Abbildung 2 Lösungen der Gleichung  $\tan(kL) = -(x_1/L)(kL)$

Gerade geht durch den Nullpunkt und hat die Steigung  $-(x_1/L)$ . Für kleine  $n$  (und nicht zu große Steigungen  $x_1/L$ ) liegen die Schnittpunkte etwas unterhalb der Nullstellen  $\pi, 2\pi, 3\pi, \dots$  der Tangensfunktion, für große  $n$  in der Nähe der ungeradzahigen Vielfachen von  $\pi/2$ . Diese ungeradzahigen Vielfachen von  $\pi/2$  sind im Übrigen die exakten Lösungen im Grenzfall  $x_1 \rightarrow \infty$ , das heißt, im Fall eines Konus mit dem Öffnungswinkel Null. Das ist die schon erwähnte zylindrischen Pfeife (Orgelpfeife) mit konstanter Querschnittsfläche.

## 2. Vergleich mit dem Experiment

Die Eigenfrequenzen  $f_n$  eines konischen Horns werden gemessen und mit den nach Gleichungen (14) und (15) berechneten verglichen. Der Hornkonus besteht aus 0,2 mm dicker Klarsichtfolie mit glatter Oberfläche, der am schmalen Ende mit Klebeband verschlossen ist. Seine Maße (siehe Abbildung 1) sind  $r = 0,0035$  m,  $R = 0,04$  m und  $L = 0,3325$  m. Nach Gleichung (9) folgt daraus  $x_1/L = 0,096$  mit einem (geschätzten) Fehler von  $\pm 0,022$ . Bei der theoretischen Berechnung der Eigenfrequenzen ist die geometrische Länge  $L$  um die Endkorrektur  $0,613 R$  zu vergrößern (Levine und Schwinger<sup>3</sup>). Mit dieser Korrektur ergibt sich eine effektive Länge  $L_{\text{eff}} = 0,3570$  m.

Zum Experiment sind folgende Anmerkungen zu machen: Das Spektrum der Eigenfrequenzen wird nach der Filtermethode mit Hilfe eines Rauschgenerators ermittelt. Abbildung 3 zeigt das Schema der Messanordnung. Der Generator erzeugt weißes Rauschen in einem Frequenzbereich von 0 bis

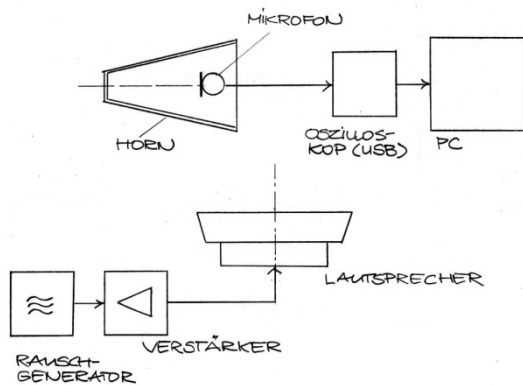


Abbildung 3 Messanordnung schematisch

fast 5 kHz. Das Rauschsignal wird verstärkt und von einem Lautsprecher in Schallschwingungen umgewandelt. Vor dem Lautsprecher wird das Klarsichtfolien-Horn im Abstand von einigen Zentimetern (10 bis 20 cm) platziert, und zwar so, dass es in einer Richtung senkrecht zur

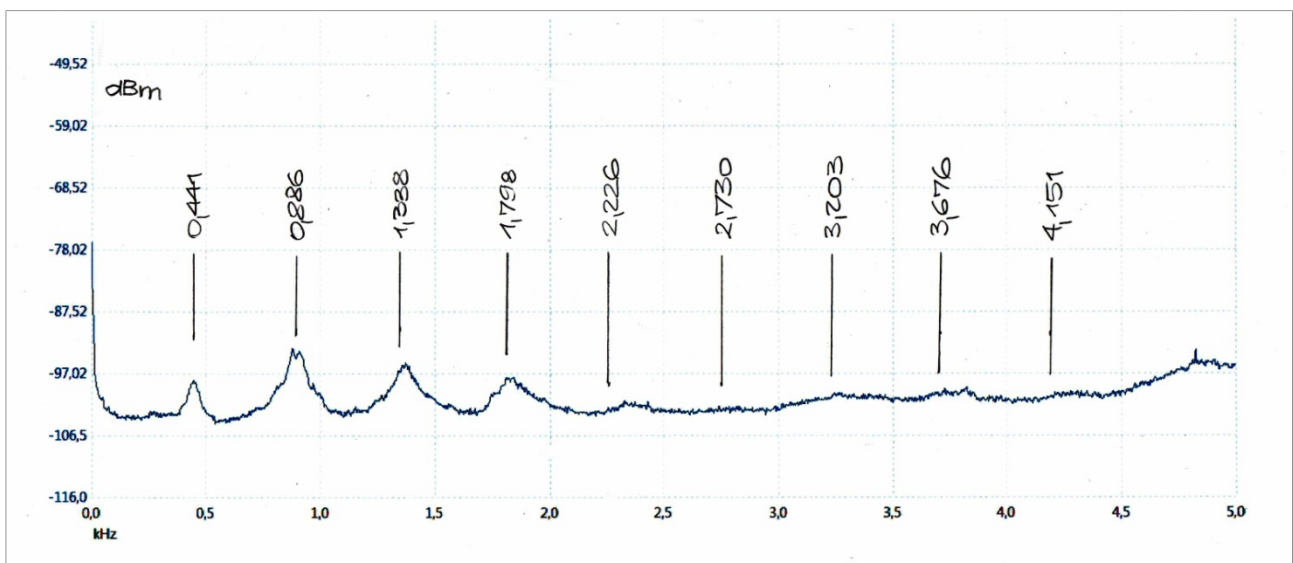


Abbildung 4 Spektrum der Schwingungsmoden des konischen Horns (Abmessungen:  $L_{\text{eff}} = 0,3570$  m,  $x_1/L = 0,096$ , siehe Text), aufgenommen mit Hilfe eines Rauschgenerators nach der Filtermethode. Die Striche markieren die Lage der theoretisch berechneten Eigenfrequenzen. Für die vier Schwingungsmoden mit den niedrigsten Frequenzen stimmen sie recht gut mit der Position der Peaks überein.

Lautsprecherachse lauscht. Es wird also nicht direkt vom Lautsprecher angestrahlt. Der Grund ist, die akustische Kopplung zwischen Lautsprecher und Horn möglichst lose zu machen, so dass die vom Horn aus dem Rauschen herausgefilterten Schwingungsmoden nicht zugedeckt werden. Ein Mikrofon, das in die Öffnung des Horns gehalten wird, nimmt das Schallgemisch in Innern des Horns auf. Das Signal, jetzt in Form elektrischer Spannungsschwankungen, lässt sich mit einem USB-Oszilloskop sichtbar machen. Der an das Oszilloskop angeschlossene PC ist mit einer FFT-Software ausgestattet, die die spektrale Zerlegung vornimmt und das Spektrum auf dem Bildschirm des Computers darstellt. Das Ergebnis zeigt Abbildung 4. Wie zu erwarten, sind eine Reihe von (relativ breiten) Peaks sichtbar, von denen die vier bei den niedrigsten Frequenzen sich deutlich aus dem Untergrund des Rauschens abheben. In der Abbildung ist auch die Lage der nach Gleichung

Tabelle 1 Theoretisch berechnete und gemessene Eigenfrequenzen  $f_n$  des im Text beschriebenen konischen Horns ( $L_{\text{eff}} = 0,3570 \text{ m}$ ,  $x_1/L = 0,096$ ).

n	$k_n L$	$(f_n)_{\text{theoretisch}}/\text{kHz}$	$(f_n)_{\text{experimentell}}/\text{kHz}$
1	2,8728	0,4406	$0,442 \pm 0,005$
2	5,7772	0,8859	$0,876 \pm 0,006$
3	8,7279	1,3384	$1,347 \pm 0,019$
4	11,7226	1,7977	$1,846 \pm 0,015$
5	14,7525	2,2262	2,347
6	17,8085	2,7301	2,922
7	20,8835	3,2025	$3,270 \pm 0,024$
8	23,9723	3,6762	$3,800 \pm 0,041$
9	27,0712	4,1514	4,283

(14) numerisch berechneten Eigenfrequenzen (für die oben genannten Größen  $L_{\text{eff}} = 0,3570 \text{ m}$  und  $x_1/L = 0,096$ ) markiert. Tabelle 1 stellt diese theoretisch berechneten Eigenfrequenzen den gemessenen Werten (Mittelwerte von 4 unabhängigen Messungen) gegenüber. Es zeigt sich, dass zumindest die niederfrequenten Peaks recht gut an den berechneten Stellen liegen. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist zwar nicht perfekt, aber akzeptabel.

## Anmerkungen und Literatur

- <sup>1</sup> Webster, A. G., *Acoustical Impedance, and the Theory of Horns and of the Phonograph*, Proc. Nat. Acad. Sci (USA) 5, S. 275-282 (1919)
- <sup>2</sup> Einen Überblick über das gesamte Gebiet der Akustik findet man z. B. in: Kuttruff, H., *Acoustics – An Introduction*, Taylor and Francis, London und New York, 2007
- <sup>3</sup> Levine, H. und Schwinger, J., *On the Radiation of Sound from an Unflanged Pipe*, Phys. Rev. 73, S. 383 – 406 (1948)