1. Etwas Theorie: Effektive Federmasse

Ein Federpendel, bestehend aus einer Schraubenfeder mit der Federkonstante D und einem Pendelkörper der Masse m, schwinge mit der (Kreis-)Frequenz ω_0 und der Amplitude A um seine Ruhelage (Abbildung 1). Die Feder selbst habe die Masse m_F. Sie wird meist gegenüber m vernachlässigt, soll aber hier berücksichtigt werden. In die Formel für die Schwingungsdauer T geht sie als effektive Federmasse $(m_F)_{eff}$ ein. Oft gibt man $(m_F)_{eff}$ in Einheiten der gesamten Federmasse m_F an, schreibt also $(m_F)_{eff} = fm_F$, so dass f der Bruchteil der Federmasse ist, der zur Schwingungsdauer beiträgt. Das Formelsymbol f für diesen Bruchteil sollte nicht mit dem Symbol für die Schwingungsfrequenz verwechselt werden, die hier immer mit $\omega_0/2\pi$ bezeichnet wird. Unter Einbezug der effektiven Federmasse ist die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega_0$ gegeben durch

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m + fm_F}{D}} \quad . \tag{1}$$

Wir berechnen f zuerst anhand eines Modells und vergleichen dann den theoretisch berechneten Wert mit den Ergebnissen eigener Experimente – und zwar für zwei Fälle: (1) die Federmasse ist klein gegenüber der Masse des Pendelkörpers, das heißt $m >> m_F$, (2) die Federmasse ist groß gegenüber der Masse des Pendelkörpers, also $m << m_F$. Im zweiten Fall rechnen wir mit dem Grenzfall $m = 0$.

Die Literatur zum Thema ist umfangreich. Eine m. E. interessante Arbeit ist die von Galloni und Kohen[2], die aufgrund wellentheoretischer Überlegungen für die genannten Grenzfälle erhalten $f \to 1/3$ für $m >> m_F$ und $f \to 4/\pi^2$ für $m << m_F$.

1.1 Masse Pendelkörper m >> Federmasse m_F

Generell gilt für die Energie (genauer: für der Summe aus kinetischer und potentieller Energie) einer mit der Frequenz ω_0 und Amplitude A harmonisch schwingenden Masse m

$$W = \frac{1}{2} m\,\omega_0^2 A^2 \quad .$$

Da die Masse der Feder über ihre Länge verteilt ist, stellen wir uns vor, dass sie aus vielen kleinen Massenelementen der Größe dm zusammengesetzt ist. Diese Massenelemente schwingen mit

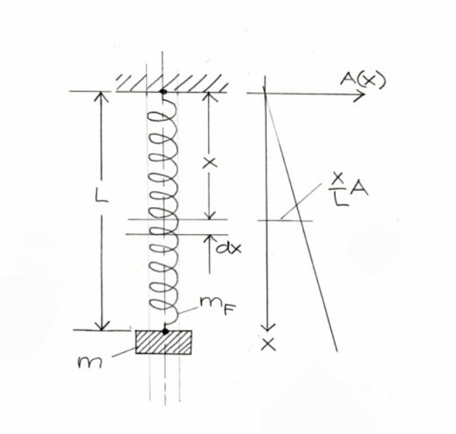

Abbildung 1 Schraubenfeder. Das Massenelement dm schwingt mit der Amplitude A(x), die linear mit dem Abstand x vom Aufhängepunkt anwächst. Ist A die Amplitude des Federendes und L die Gesamtlänge der Feder, gilt A(x) = (x/L)A.

gleicher Frequenz ω_0, aber unterschiedlichen Amplituden. Wir nehmen an, die Amplitude hänge (nur) ab vom Abstand x des Massenelements vom Aufhängepunkt der Feder (Abbildung 1). Nennen wir die Amplitude, mit der das Massenelement dm am Ort x schwingt, $A(x)$, dann gilt also

$$(2) \qquad dW(x) = \frac{1}{2} dm\, \omega_0^2 A^2(x) \quad .$$

Für den Verlauf der Amplitude $A(x)$ als Funktion von x geben wir vor, dass sie linear mit x anwächst. Bezeichnen wir die gesamte Länge der Feder mit L, ist also

$$(3) \qquad A(x) = \frac{x}{L} A \; .$$

Diese Näherung ist plausibel, da der Querschnitt des Federdrahts pro Windung um denselben Winkel verdreht wird, die Feder sich daher pro Windung um dieselbe Strecke verlängert. Das ist der Fall, wenn die Dehnung durch die Gewichtskraft einer im Vergleich zur Federmasse großen Masse m verursacht wird – wenn also gilt $m >> m_F$. Wir setzen weiterhin voraus, dass die Masse der Feder *gleichmäßig* über ihre Länge verteilt ist. Bezeichnen wir die Masse pro Längeneinheit mit μ, lässt sich das Massenelement schreiben

$$dm = \mu\, dx \; .$$

Damit wird Gleichung (2) zu

$$dW_F(x) = \frac{1}{2} \mu\, dx\, \omega_0^2 \frac{x^2}{L^2} A^2 \; .$$

Die gesamte in der Feder vorhandene Energie folgt durch Integration über die Länge L der Feder:

$$\begin{aligned} W_F &= \frac{1}{2} \mu\, \omega_0^2 \frac{A^2}{L^2} \int_0^L x^2 dx \\ (4) \qquad &= \frac{1}{2} \mu\, \omega_0^2 \frac{A^2}{L^2} \frac{L^3}{3} \qquad . \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mu L}{3} \omega_0^2 A^2 \end{aligned}$$

Da μL die Masse m_F der Feder ist, folgt weiterhin

$$(5) \qquad W_F = \frac{1}{2} \frac{m_F}{3} \omega_0^2 A^2 \; .$$

Dies ist die in der Bewegung der Feder gespeicherte Energie. Die an der Feder hängende Masse m des Pendelkörpers trägt natürlich mit ihrem vollen Wert $m\omega_0^2 A^2/2$ zur Schwingungsenergie bei. Die gesamte, im System gespeicherte Energie ist also in der Näherung $m >> m_F$ gegeben durch

$$(6) \qquad W_F = \frac{1}{2}(m + \frac{m_F}{3}) \omega_0^2 A^2 .$$

Diese Energie kann auch mithilfe der Federkonstanten D in der Form

$$(7) \qquad W_F = \frac{1}{2} D A^2$$

dargestellt werden, so dass folgt

$$\omega_0^2 = D / (m + \frac{m_F}{3}) \; .$$

Mit $\omega_0 = 2\pi / T$ wird dann

$$(8) \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{1}{3} m_F}{D}} \; .$$

Also geht im Fall $m >> m_F$ (Federmasse klein gegen die Masse des Pendelkörpers) die Federmasse mit einem Drittel ihres Wertes in die Schwingungsdauer ein:

$$(9) \qquad (m_F)_{eff} = \frac{1}{3} m_F \qquad (m >> m_F).$$

1.2 Masse Pendelkörper m << Federmasse m_F

Im entgegengesetzten Fall $m << m_F$ kann man davon ausgehen, dass der Grenzwert $m = 0$ zu ähnlichen Ergebnissen führt wie wenn sich m der Null nähert. Wir betrachten $m = 0$, weil dieser Fall

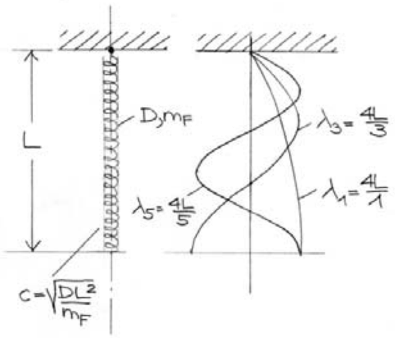

Abbildung 2 Frei herunterhängende Schraubenfeder (Federkonstante D, Masse m_F) als langgestreckter elastischer Körper der Länge L. Stehende Longitudinalwellen haben Wellenlängen λ = 4L/n mit n = 1,3,5,...

„einfach" ist: Das Gewichtsstück fehlt, die Schraubenfeder hängt aufgrund ihres eigenen Gewichts senkrecht nach unten. Wir fassen sie als langgestreckten elastischen Körper der Länge L auf, der oben eingespannt (festes Ende) und unten beweglich (loses Ende) ist. In diesem elastischen Medium bilden sich stehende Longitudinalwellen aus, das heißt, Verdichtungen und Verdünnungen der Federwindungen. Am oberen, festen Ende befindet sich ein Schwingungsknoten, am unteren, losen Ende ein Schwingungsbauch. Die Wellenlängen sind also gegeben durch

$$(10) \qquad \lambda(n) = \frac{4L}{n}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots \ .$$

Wir nehmen an, dass wir nur die Grundschwingung mit $n = 1$ anregen. Dann ist $\lambda = 4L$ und für die Phasengeschwindigkeit c der Welle folgt wegen $c = \lambda \cdot \omega_0 / 2\pi$

$$(11) \qquad c = 4L\frac{\omega_0}{2\pi} \ .$$

Die Phasengeschwindigkeit ist andererseits gegeben durch[3]

$$(12) \qquad c = \sqrt{\frac{DL^2}{m_F}} \ ,$$

so dass folgt

$$\frac{2L}{\pi}\omega_0 = L\sqrt{\frac{D}{m_F}} \qquad \text{oder}$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{D}{m_F}} \ .$$

Vergleicht man dieses Ergebnis mit der allgemeinen Formel für die Eigenfrequenz einer harmonischen Schwingung

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{(m_F)_{eff}}} \ ,$$

wobei $(m_F)_{eff}$ die effektive Masse der Feder ist, so folgt

$$(13) \qquad (m_F)_{eff} = \frac{4}{\pi^2} m_F \quad (m = 0).$$

Im Fall $m = 0$ (und vermutlich auch für $m << m_F$) geht also die Federmasse mit dem Bruchteil $4/\pi^2$ = 0,405… in die Schwingungsdauer ein.

2. Experiment

2.1 Fall $m >> m_F$ (Masse Pendelkörper >> Federmasse)

In Demonstrationsexperimenten oder bei den Versuchen der physikalischen Praktika an Schulen und Hochschulen ist die Federmasse in der Regel klein gegenüber der Masse des Pendelkörpers. Oft wird sie sogar vernachlässigt. Ist sie nicht vernachlässigbar, nähert man sie gerne als Konstante an – das heißt, als eine vom Verhältnis m_F/m unabhängige Größe. Im Experiment bestimmt man die (als Konstante betrachtete) effektive Federmasse $(m_F)_{eff}$, indem man die Schwingungsdauer T als Funktion der Masse m des Pendelkörpers misst und für $m \to 0$ extrapoliert. So gehen wir auch hier vor. In der Praxis extrapoliert man nicht T, sondern das Quadrat T^2 der Schwingungsdauer in Richtung $m = 0$. Aus Gleichung (1) folgt

$$\begin{aligned} T^2 &= 4\pi^2 \frac{m + f m_F}{D} \\ &= \frac{4\pi^2}{D} m + \frac{4\pi^2}{D} f m_F \end{aligned} \qquad (14)$$

Das heißt, die Messpunkte von T^2 sollten, aufgetragen als Funktion von m, auf einer Geraden liegen mit der Steigung $4\pi^2/D$ und dem Achsenabschnitt $(4\pi^2/D) f m_F$. Abbildung 3 zeigt das Ergebnis einer solchen Messung an einer Stahlfeder mit $D = 3{,}034 \pm 0{,}0292$ N/m und $m_F = 15{,}45 \pm 0{,}02$ g. Der Quotient aus Achsenabschnitt und Steigung ist die effektive Federmasse $(m_F)_{eff}$. Es ergibt sich $(m_F)_{eff} = 6{,}43 \pm 0{,}68$ g (± 10,6 %) oder $f = 0{,}416 \pm 0{,}044$. Da die Messpunkte dem durch

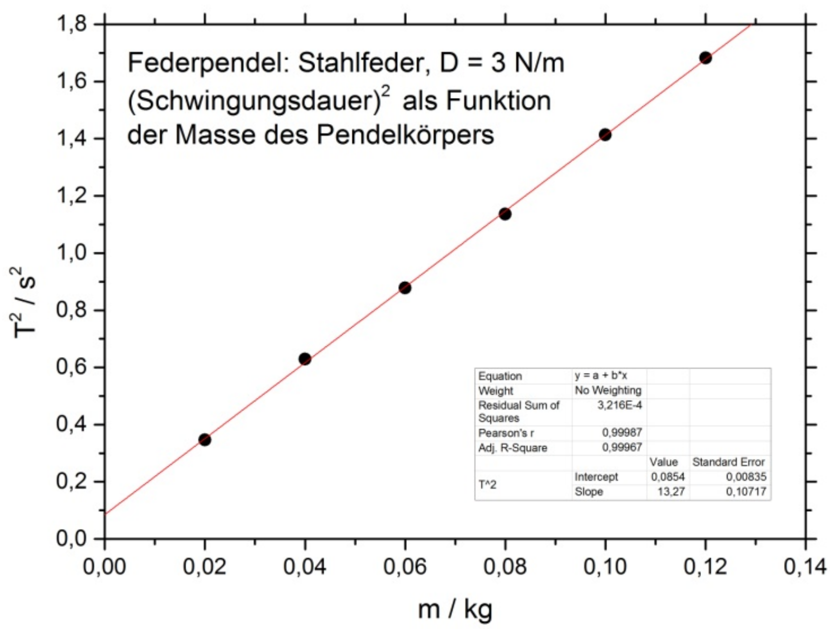

Abbildung 3 Quadrat T^2 der Schwingungsdauer eines Federpendels als Funktion der Masse m des Pendelkörpers. An die Messpunkte wurde eine Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate angepasst. Aus Achsenabschnitt und Steigung der Gerade ergibt sich nach Gleichung (14) eine effektive Federmasse $(m_F)_{eff}$ = 6,43 g, siehe Text. Dem entspricht der Bruchteil f = 0,416 ± 0,044, mit dem die Federmasse in die Schwingungsdauer eingeht.

Gleichung (14) gegebenen Verlauf folgen, ist die Annahme einer konstanten effektiven Federmasse gerechtfertigt. Vorsichtiger formuliert, lässt sich eine Abhängigkeit der effektiven Federmasse vom Quotienten m_F/m nicht feststellen, sie geht in der Streuung der Messpunkte unter. Der aus den Daten extrahierte Bruchteil f liegt zwar im Bereich der beiden theoretisch berechneten Werte 1/3 (0,333) bzw. $4/\pi^2$ (0,405), kann aber wegen des Fehlers von ca. 10 % keinem der beiden Zahlen zugeordnet werden – leider ein etwas dürftiges Ergebnis.

Lässt die Abhängigkeit der effektiven Federmasse vom Quotienten m_F/m wenigstens einen Trend erkennen? Zum Schluss des Unterabschnitts gehen wir dieser Frage nach: Löst man Gleichung (14) nach f auf, erhält man

$$(15) \qquad f = \frac{D}{4\pi^2 m_F} T^2 - \frac{1}{m_F} m \ .$$

Das heißt, aus Messungen von T und m kann bei Kenntnis von D und m_F der Bruchteil f berechnet werden. Das Ergebnis solcher Messungen (und Rechnungen) ist in Abbildung 4 dargestellt. Dabei wurden, wie oben, $D = 3{,}034 \pm 0{,}0292$ N/m und $m_F = 15{,}45$ g gesetzt. Die Abbildung zeigt

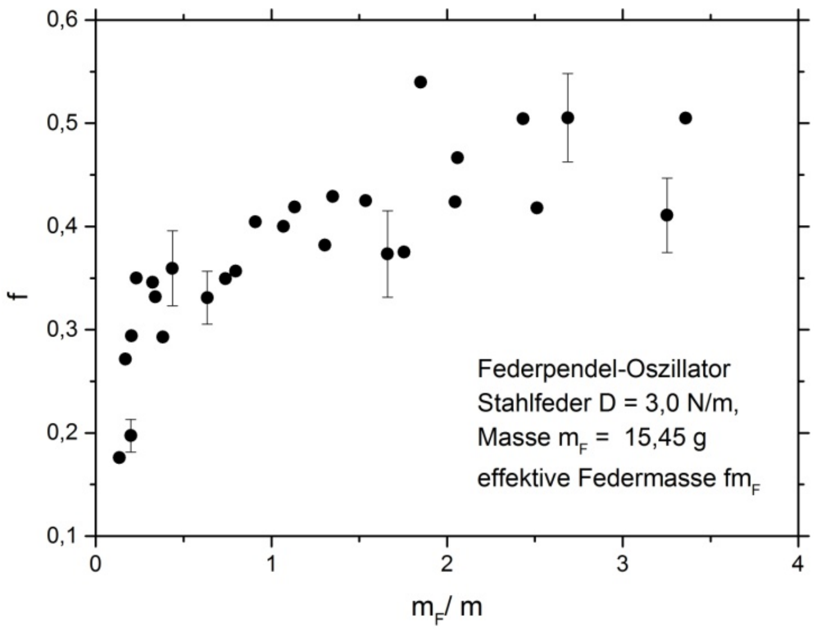

Abbildung 4 Bruchteil f, mit dem die Federmasse m_F in die Schwingungsdauer T des Federpendels eingeht. Die absoluten Werte von f könnten mit einem systematischen Fehler behaftet sein. Der generelle Trend ist aber erkennbar: f wird mit steigendem Quotienten m_F/m größer.

tatsächlich einen Trend, allerdings auch relativ große Fehlerbalken. Grob gesprochen wird der Bruchteil f mit steigendem Quotienten m_F/m größer. Das entspricht auch der Theorie, wonach für $m_F/m \to 0$ der Bruchteil f gegen den kleineren Wert 1/3 und für $m_F/m \to \infty$ gegen den größeren Wert $4/\pi^2$ geht. Die numerischen Werte von f sind zwar nicht sehr aussagekräftig – sie hängen nach Gleichung (15) systematisch vom Zahlenwert von D ab. Trotzdem ist interessant, dass sie bei sehr kleinem Quotienten m_F/m den Wert 1/3 unterschreiten und bei sehr großem Quotienten über die Zahl $4/\pi^2$ hinausgehen.

2.2 Fall $m << m_F$ (Masse Pendelkörper << Federmasse)

Wie im Abschnitt Theorie schon geschehen, soll auch experimentell nur den Grenzfall $m = 0$ untersucht werden. Das Ziel ist, wie im Fall der vernachlässigbaren Federmasse, den in Gleichung (14) definierten Faktor f zu bestimmen, jetzt also für eine Schraubenfeder ohne angehängten Pendelkörper. Rodriguez und Gesnouin[4] haben dazu Messungen an verschiedenen Metall- und

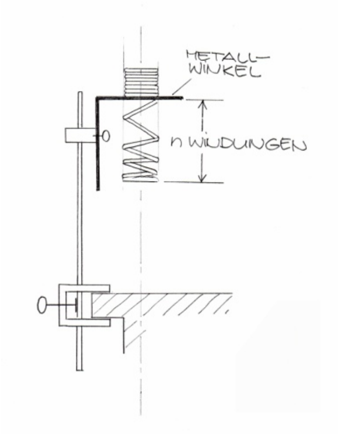

Abbildung 5 Anordnung der Schraubenfeder mit n aktiven Windungen, nach Rodriguez und Gesnouin[4]. Siehe Text.

Plastikfedern ausgeführt und erhalten einen Faktor f von 0,42 bzw. 0,43. Ihr Experiment ist originell und zugleich einfach und soll hier wiederholt werden. Die Herausforderung des Experiments besteht darin, verschieden lange Federabschnitte zu untersuchen ohne die Feder aufschneiden zu müssen. Man erhält diese Abschnitte, indem man die Windungen der Feder an der passenden Stelle geringfügig auseinanderzieht und dort über den waagerechten Arm eines Metallwinkels zieht. Der Metallwinkel ist geeignet fixiert, beispielsweise mit Hilfe von Stativmaterial. Die unterhalb des Metallwinkels herabhängenden Federwindungen stellen den aktiven Teil der Feder dar, für ihn werden Federkonstante und Schwingungsdauer gemessen. Die oberhalb des Metallwinkels befindlichen Federwindungen liegen unbeweglich aufeinander, sind also inaktiv. Abbildung 5 zeigt eine schematische Skizze der Anordnung, Abbildung 6 ein Foto des Metallwinkels mit dem oberen Teil der Feder.

Abbildung 6 Halterung der (Plasik-)Schraubenfeder. Der unterhalb des Metallwinkels herabhängende Teil der Feder ist aktiv.

Zur Auswertung der Messungen gehen Rodriguez und Gesnouin aus von Gleichung (1) mit $m = 0$. Federmasse und Federkonstante hängen jetzt ab von der Anzahl n der aktiven Federwindungen. Sie werden hier mit $m(n)$ bzw. $D(n)$ bezeichnet, so dass die Schwingungsdauer sich ergibt zu

$$(16) \qquad T(n) = 2\pi\sqrt{\frac{fm(n)}{D(n)}} \; .$$

Für den Bruchteil f setzen die Autoren voraus, dass er unabhängig von n ist. Die Masse $m(n)$ des aktiven Federabschnitts lässt sich schreiben

$$(17) \qquad m(n) = n\frac{m_F}{N} \ .$$

Dabei ist m_F die gesamte Masse der Feder und N deren gesamte Windungszahl. Für die Federkonstante $D(n)$ des aktiven Federabschnitts wird die plausible Annahme gemacht, dass sie umgekehrt proportional zur Windungszahl n ist. Das heißt

$$(18) \qquad D(n) = \frac{C}{n} \ .$$

dabei ist C eine vom Experiment zu bestimmende Konstante. Setzt man (17) und (18) in (16) ein, folgt

$$(19) \qquad T(n) = 2\pi\sqrt{\frac{fm_F}{CN}}\,n = An \ .$$

Auch hier ist A eine experimentell zu bestimmende Konstante. Für f ergibt sich schließlich

$$(20) \qquad f = \frac{A^2CN}{4\pi^2 m_F} \ .$$

In den Messfehler von f gehen damit im Wesentlichen die Fehler von A und C ein.

Und nun zu den eigenen Messungen. Sie wurden an nur einer Schraubenfeder ausgeführt, einer Plastikfeder mit $N = 180$ Windungen und der Masse $m_F = 54{,}182$ g. Gemessen wurden, wie durch Gleichungen (18) und (19) vorgegeben, die Federkonstante D (statische Messung) und die Schwingungsdauer T (dynamische Messung), beide Größen als Funktion der aktiven Windungszahl n. Zur Bestimmung der Konstanten C (Gleichung 18) wurde D als Funktion von $1/n$ aufgetragen. Abbildung 7 zeigt, dass die Messpunkte, wie erwartet, auf einer Geraden durch den Nullpunkt liegen. Eine Anpassung nach der Methode der kleinsten Quadrate liefert als Steigung $C = 93{,}21 \pm 1{,}41$ N/m.

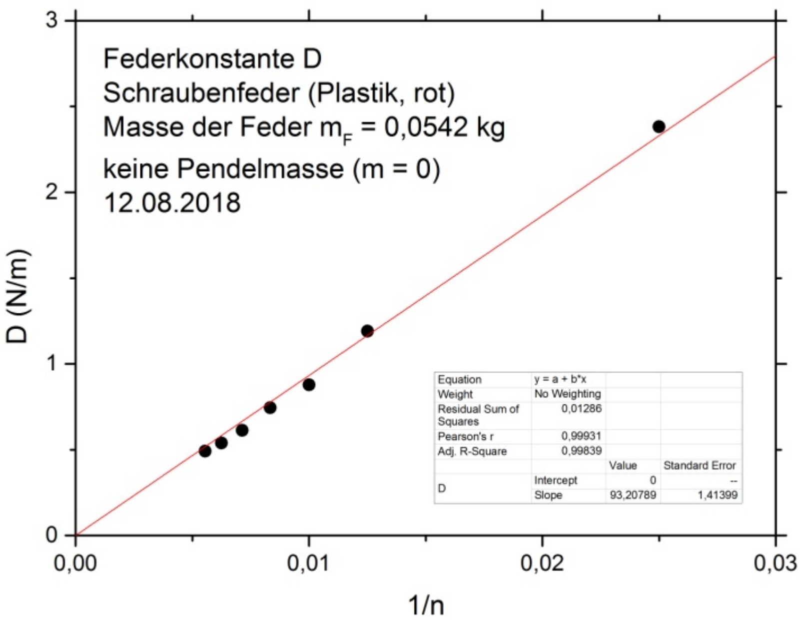

Abbildung 7 Federkonstante D(n) einer unbelasteten Schraubenfeder als Funktion des Kehrwerts 1/n der Windungszahl. Die Steigung der (Nullpunkts-)Geraden ist C (Gleichung 18).

Abbildung 8 zeigt das Ergebnis der Messung der Schwingungsdauer T zur Bestimmung der Konstanten A. Die Messpunkte wurden hier als Funktion von n aufgetragen. Sie liegen gemäß

Gleichung (19) auch in diesem Fall auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Die Anpassung ergibt als Steigung A = 0,00717 ± 0,000032 s.

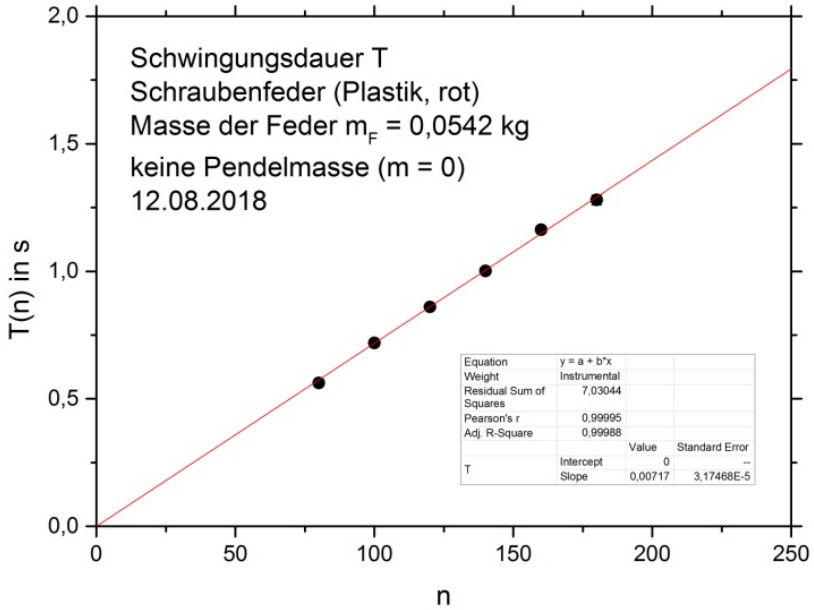

Abbildung 8 Schwingungsdauer T(n) einer unbelasteten Schraubenfeder (keine anhängende Pendelmasse) als Funktion der Windungszahl n. Die Steigung der Geraden ist A (Gleichung 19).

Aus den Werten für A, C und m_F folgt schließlich nach Gleichung (20) der Bruchteil f = 0,4032 ± 0,0097, in guter Übereinstimmung mit dem theoretischen Wert $4/\pi^2$ = 0,4053. Rodriguez und Gesnouin[4] erhielten die etwas größeren Werte f = 0,42 und 0,43.

3. Fazit

Auch wenn mir der Überblick über die einschlägigen Arbeiten fehlt, ich komme zu dem Schluss: Das Problem der effektiven Federmasse eines Federpendels ist weiterhin ungeklärt. Aus den hier beschriebenen Messungen geht jedenfalls hervor, dass f auch Werte annehmen kann, die von den vielfach genannten Zahlen 1/3 bzw. $4/\pi^2$ abweichen.

Anmerkungen und Literatur

[1] W. Walcher: *Praktikum der Physik*, B. G. Teubner, Stuttgart (1966), S. 77f

[2] E. E. Galloni und M Kohen: *Influence of the mass oft he spring on ist static and dynamic effects*, Am. J. Phys. 72, S. 818 – 878 (2004)

[3] Die Phasengeschwindigkeit einer elastischen Longitudinalwelle in einem langgestreckten Körper ist gegeben durch

$$c = \sqrt{\frac{E}{\mu}} ,$$

wobei E der Elastizitätsmodul und μ die Massenbelegung bedeuten. Für eine Spiralfeder der Länge L, Querschnittfläche A, Masse m und der Federkonstanten D ist $E = DL/A$ und $\mu = m_F/AL$. Daraus folgt

$$c = \sqrt{\frac{DL}{A} \cdot \frac{AL}{m_F}} = \sqrt{\frac{DL^2}{m_F}} \; .$$

siehe z. B. die Anleitung zum *Versuch 3: Schwingungen und Wellen*, Uni Regensburg, www.physik.uni-regensburg.de/studium/praktika/a1/download/versuch3.pdf

[4] Eduardo E. Rodriguez und Gabriel A. Gesnouin: *Effective Mass of an Oscillating String*, Physics Teacher 45, 2007, S. 100