

## 1. Prinzip des Resonators

Ein Helmholtz-Resonator besteht aus einem Hohlraum mit starren Wänden, der eine kleine Röhre als Öffnung besitzt. Das Volumen des Hohlraums sei  $V$ , die Röhre habe die Länge  $L$  und die Querschnittsfläche  $A$ . Abbildung 1 zeigt eine Skizze mit den entsprechenden Bezeichnungen. Das

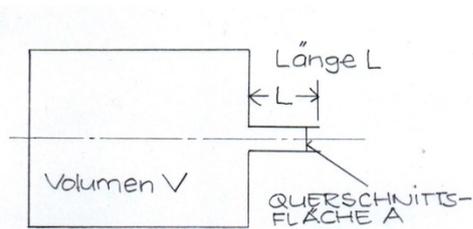


Abbildung 1 Helmholtz-Resonator

System ist in der Lage, bei geeigneter Anregung Schall abzustrahlen. Wir interessieren uns dafür, von welchen Eigenschaften des Resonators dessen (Resonanz-)Frequenz und Gütefaktor ( $Q$ -Wert) abhängen. Dazu setzen wir voraus eine »dünne« und im Vergleich zu den Hohlraumabmessungen »kurze« Öffnung, deren Länge außerdem »klein« ist gegenüber der Wellenlänge  $\lambda$  des Schalls in Luft. Das heißt, es soll gelten

$$(1) \quad \sqrt{A} \ll L \ll \sqrt[3]{V} \ll \lambda$$

mit

$$(2) \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

und

$$(3) \quad c = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} .$$

Dabei ist  $c$  die Schallgeschwindigkeit in Luft,  $\omega = 2\pi f$  die Kreisfrequenz der Schallschwingung ( $f$  die übliche Frequenz),  $p$  der Luftdruck,  $\gamma = 1,4$  der Adiabatenkoeffizient und  $\rho$  die Dichte der Luft.



Abbildung 2 Weinflasche und Geigenkorpus als Helmholtz-Resonatoren

Wir betrachten als Beispiele für Helmholtz-Resonatoren zwei Objekte, an denen wir auch Messungen vornehmen: Eine (Wein-)Flasche und den Korpus einer Geige (Abbildung 2). Das Anblasen von Flaschen ist Folklore, man kann dabei aber auch Physik studieren<sup>1</sup>. Die Helmholtz-Resonanz der

Geige wurde von Coffey<sup>2</sup> ausführlich untersucht. Vandegrift<sup>2</sup> beschreibt Experimente mit dem Ziel, die Resonanz zum Gegenstand eines Praktikumsversuchs zu machen. Der vorliegende Artikel berichtet über Experimente mit den genannten Versuchsobjekten, die auf Hobby-Niveau ausführbar sind.

## 2. Resonanzfrequenz

Schall entsteht, wenn Luft in Schwingung versetzt wird und die so erzeugten Dichteschwankungen sich ausbreiten. In unserem Fall schwingt die Luft in der *Röhre* des Resonators. Man kann sie als Masse auffassen, die an eine Feder gekoppelt ist. Als Feder wirkt die Luft im *Hohlraum* des Resonators. Sie ist eine Art Polster, erzeugt bei Kompression einen Druck und bei Expansion einen Sog, dem die Luft in der Röhre ausgesetzt ist. Dadurch wird diese hin und her bewegt. Wir zeigen weiter unten, dass die Rückstellkraft des Luftpolsters im Hohlraum proportional zur Auslenkung der Luftmasse in der Röhre ist und unser System daher als harmonischer Oszillator betrachtet werden kann. Diesem wird durch die ausgesandten Schallwellen und durch die Reibung der Luft an den Wänden der Röhre fortwährend Energie entzogen, er ist also das klassische Beispiel eines gedämpften harmonischen Oszillators. Wir berechnen zunächst dessen Resonanzfrequenz. Im Fall schwacher Dämpfung ist sie näherungsweise gegeben durch

$$(4) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}.$$

Dabei ist  $m$  die Masse der Luft, die sich in der *Röhre* hin und her bewegt, und  $D$  die (noch zu bestimmende) Federkonstante der Luft im *Hohlraum*. Die Luft in der Röhre wird als inkompressibel, also als starrer Körper betrachtet. Daher gilt

$$(5) \quad m = \rho AL.$$

Im Gegensatz dazu wird die Luft im Hohlraum als kompressibel erachtet. Sie ist, wie gesagt, die Feder in unserem Masse-Feder-Pendel. Ihre Federkonstante  $D$  ergibt sich aus folgender Überlegung: Die momentane Lage der Luftmasse  $m$  in der Röhre werde durch die Koordinate  $x$  beschrieben und die auf sie wirkende Kraft als  $F = -D\Delta x$  angenommen. Dabei ist  $\Delta x$  die Auslenkung der Luftmasse aus der Ruhelage. Während der Kompressionsphase beispielsweise werde das Volumen des Luftpolsters im Hohlraum um  $\Delta V = A\Delta x$  verkleinert. Da die Kompression adiabatisch erfolgt, berechnet sich die daraus folgende Druckerhöhung  $\Delta p$  nach dem Adiabatengesetz

$$(6) \quad pV^\gamma = \text{const}$$

zu

$$(7) \quad \frac{\Delta p}{p} = -\gamma \frac{\Delta V}{V}.$$

Diese Druckerhöhung führt zu einer Kraft  $F = A\Delta p$  auf die Luft in der Röhre, so dass  $-D\Delta x = A\Delta p$  gesetzt wird. Daraus folgt als Federkonstante des Luftpolsters im Hohlraum

$$(8) \quad D = -\frac{A\Delta p}{\Delta x} = \frac{A\gamma p \Delta V}{V\Delta x} = \frac{A\gamma p A\Delta x}{V\Delta x} = \frac{\gamma p A^2}{V}.$$

Die Resonanzfrequenz ist damit gegeben durch

$$(9) \quad \omega_0^2 = \frac{D}{m} = \frac{\gamma p A^2}{mV} = \frac{\gamma p A^2}{\rho ALV} = \frac{\gamma p}{\rho} \frac{A}{LV} = c^2 \frac{A}{LV}.$$

Etwas handlicher ist die Formel für  $f_0$  ( $f_0 = \omega_0/2\pi$ )

$$(10) \quad f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{LV}} .$$

Dazu Zahlenbeispiele für unsere Versuchsobjekte Weinflasche und Geige:

(1) Beim Anblasen einer Flasche wird die Luft im Flaschenhals in Schwingungen versetzt, die Luft im Bauch der Flasche wirkt als Feder. Das Volumen des Weinflaschenbauchs schätzen wir zu  $V = 0,75$  Liter, Länge und Querschnittsfläche des Halses seien  $L = 7$  cm bzw.  $A = 2$  cm<sup>2</sup>. Als Schallgeschwindigkeit bei 20° C setzen wir an  $c = 342$  m/s. Das ergibt  $f_0 = 106$  Hz, also einen Ton etwas tiefer als das musikalische A (110 Hz, mittlere Bass-Saite auf der Gitarre).

(2) Der Korpus einer Geige macht die Vibration der gestrichenen oder gezupften Saite hörbar, indem er in Resonanz zum Mitschwingen angeregt wird. Eine Geige besitzt viele Resonanzen, die mit der tiefsten Frequenz ist eine Helmholtz-Resonanz. Sie wird in der Literatur mit »A<sub>0</sub>« bezeichnet. Bei ihr stellen die  $f$ -Löcher die Röhre dar, in der sich die schwingende Luftsäule bildet, während die Luft im Innern des Geigenkorpus als Feder wirkt. Die Länge der Röhre (und damit die der schwingenden Luftsäule) sollte von der Größenordnung der Dicke des Geigendeckels sein, also  $L \approx 5$  mm. Tatsächlich ist sie größer, da an beiden Enden der Röhre die (von Pfeifen her bekannte) Endkorrektur zu addieren ist. Der Einfachheit halber rechnen wir mit  $L = 1$  cm. Die Querschnittsfläche der beiden  $f$ -Löcher schätzen wir grob zu insgesamt 8 cm<sup>2</sup> (Länge eines  $f$ -Lochs  $\approx 8$  cm, seine Breite  $\approx 0,5$  cm). Das Volumen des Geigenkorpus kann man zu  $V = 2400$  cm<sup>3</sup> annehmen, und für die Schallgeschwindigkeit setzen wir wie oben  $c = 342$  m/s. Damit wird  $f_0 = 317$  Hz. Die A<sub>0</sub>-Resonanz verstärkt im Übrigen die Abstrahlung von Tönen in der Nähe von musikalisch  $d_1$  (294 Hz, leere D-Saite auf der Geige).

### 3. Q-Wert

Setzt man die Luftmasse  $m$  in der Röhre des Resonators einer periodischen Kraft  $F = F_0 \exp(i\omega t)$  aus, reagiert sie mit einer (erzwungenen) Schwingung gemäß

$$(11) \quad m\ddot{x} + R\dot{x} + Dx = F_0 e^{i\omega t} .$$

Das ist die bekannte Bewegungsgleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators:  $D$  ist die schon erwähnte Federkonstante und  $R$  die Dämpfungskonstante, die den Energieverlust durch Abstrahlung und Wärmeerzeugung (durch Reibung an den Wänden der Röhre) beschreibt. Ohne auf die Theorie weiter einzugehen, sei hier die Formel für den  $Q$ -Wert (den Gütefaktor) des gedämpften harmonischen Oszillators<sup>4</sup> genannt. Sie lautet

$$(12) \quad Q = \frac{\omega_0 m}{R} = \frac{\sqrt{mD}}{R} .$$

In dieser Formel sind  $\omega_0$  und  $m$  nach Gleichungen (9) bzw. (5) einzusetzen. Im Fall der Dämpfungskonstante  $R$  beschränken wir uns auf die Dämpfung durch Abstrahlung. Sie ergibt sich aus tiefgreifenden akustischen Überlegungen<sup>5</sup> (Abstrahlung des Schalls aus der Öffnung von Pfeifen) zu

$$(13) \quad R = \frac{\rho c k^2 A^2}{2\pi} = \frac{\rho c \cdot \omega_0^2 A^2}{2\pi \cdot c^2} = \frac{\rho \cdot \omega_0^2 A^2}{2\pi \cdot c}$$

mit  $k = 2\pi/\lambda = \omega_0/c$  (Wellenzahl der Schallwelle). Setzt man dieses  $R$  in Gleichung (12) ein, folgt

$$(13) \quad Q = \omega_0 \cdot \rho LA \cdot \frac{2\pi c}{\rho \omega_0^2 A^2} = 2\pi c L \cdot \frac{1}{\omega_0 A} = 2\pi c L \cdot \frac{1}{c} \sqrt{\frac{VL}{A}} \cdot \frac{1}{A} = 2\pi \sqrt{V \left(\frac{L}{A}\right)^3} .$$

Nochmals der Hinweis: Die Formel setzt voraus, dass die Dämpfung des Resonators nur durch die

abgestrahlte Energie erfolgt. In der Regel ist diese Bedingung nicht erfüllt, Verluste durch Reibung sind oft nicht vernachlässigbar.

Auch hier Zahlenbeispiele für unsere Versuchsobjekte Weinflasche und Geige:

(1) Mit den genannten Abmessungen der Weinflasche ( $V = 0,75$  Liter,  $L = 8$  cm und  $A = 2$  cm<sup>2</sup>) erhält man nach Gleichung (13) die Güte  $Q = 1376$ . Der Wert ist ungewöhnlich groß, die Messung (siehe unten) ergibt eine wesentlich kleinere Zahl.

(2) Für die  $A_0$ -Resonanz der Geige folgt aus  $V = 2400$  cm<sup>3</sup>,  $L = 1$  cm und  $A = 8$  cm<sup>2</sup> eine Güte  $Q = 13,6$ . Erstaunlicherweise ist das die Größenordnung, in der sich auch die Messwerte bewegen (siehe unten).

#### 4. Messung von Resonanzfrequenz und Q-Wert

Resonanzfrequenz und  $Q$ -Wert bestimmt man in der Regel aus der Kurve, die den Energieinhalt des Resonators als Funktion der Frequenz darstellt. Die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ist die Stelle des Maximums der Kurve. Der  $Q$ -Wert ergibt sich aus der Breite  $\Delta\omega$  der Kurve bei halber Höhe. In der Näherung schwacher Dämpfung ist  $Q = \omega_0/\Delta\omega$ .

Höhe und Breite experimentell bestimmter Resonanzkurven sind erfahrungsgemäß nicht unabhängig vom Messverfahren. Im Prinzip beruhen alle Messverfahren darauf, den Resonator zu erzwungenen Schwingungen anzuregen und diese Schwingungen zu analysieren. In der Akustik besteht die Anregung darin, in irgendeiner Weise Schallwellen zu erzeugen. Schall hat den Nachteil, sich auch dorthin auszubreiten, wo er unerwünscht ist. Deshalb ist es meist schwierig, den Schwingungserreger vom Resonator zu entkoppeln.

Bei der Weinflasche regen wir die Helmholtz-Schwingung, wie üblich, durch seitliches Anblasen der Flaschenöffnung an. Luftwirbel, die sich von der Glaskante ablösen, fachen die Schwingung im Flaschenhals an. Trotz ihrer unmittelbaren Nähe sind Erreger und Resonator hier offenbar nur lose gekoppelt, sodass saubere Töne entstehen – zumindest dem Gehör nach zu urteilen. Zur objektiven Beurteilung wurde das Tongemisch der angeblasenen Flasche mit einem Mikrophon aufgenommen. Dessen Signal wurde, wie üblich, digitalisiert und mit Hilfe einer *FFT*-Software (»Spectrogram«) auf dem Bildschirm eines Rechners<sup>6</sup> dargestellt. Abbildung 3 zeigt das so erhaltene Spektrum der oben genannten 0,75-Liter-Weinflasche. Es enthält mehrere Linien, am weitesten links die Linie der Grundschiwingung, weiter rechts die einiger Oberwellen. Die Frequenz der Grundschiwingung ist die hier interessierende Resonanzfrequenz. Sie beträgt  $f_0 = 115$  Hz, ist also nur wenig größer als die Abschätzung 106 Hz nach Gleichung (10). Die Breite der Linie lässt sich grob zu 2,8 Hz abschätzen, so dass der experimentelle Gütefaktor etwa  $Q = 41$  beträgt. Der Wert ist, wie erwartet, erheblich kleiner als die theoretische Abschätzung  $Q = 1376$ , die nur den Strahlungsverlust berücksichtigt. Das heißt, die Verluste durch Reibung überwiegen bei Weitem.

Im Fall der  $A_0$ -Resonanz der Geige messen wir die Resonanzkurve wie folgt: Ein Lautsprecher beschallt eines der  $f$ -Löcher der Geige mit einem Signal, das ein breites Spektrum von Frequenzen enthält, und zwar so, dass alle Frequenzen mit gleicher Intensität vertreten sind (weißes Rauschen). Die Geige filtert aus diesem Signal diejenigen Frequenzen heraus, die sie zum Mitschwingen anregen und strahlt sie wieder ab, andere Frequenzen werden unterdrückt. Ein Mikrophon, das beispielsweise über dem anderen (zweiten)  $f$ -Loch angebracht ist, registriert dann ein Spektrum, das an den Stellen der Resonanz erhöhte Intensität zeigt. Das vom Lautsprecher eingestrahelte Signal lässt sich allerdings kaum vom Mikrophon fernhalten. Die Resonanzkurve erhebt sich daher im Spektrum über einem relativ hohen Rauschpegel als Untergrund. Dass ihre Breite durch direkte Einstrahlung des Lautsprechersignals beeinflusst wird, ist erfahrungsgemäß nicht der Fall. Sie könnte jedoch durch die Kopplung zwischen Erreger (Lautsprecher) und Resonator (Geigenkorpus) beeinflusst werden, deren Stärke nicht abschätzbar ist.

Abbildung 4 zeigt das Spektrum der so gemessenen Geigenresonanzen unterhalb 600 Hz. Der breite Peak bei etwa 275 Hz entspricht der hier betrachteten Helmholtz- oder  $A_0$ -Resonanz. Bei ihr stellen die  $f$ -Löcher der Geige die Röhre dar, in der sich eine schwingende Luftsäule bildet, während die Luft im Innern des Geigenkorpus als Feder wirkt. Aus insgesamt acht Messungen erhalte ich als

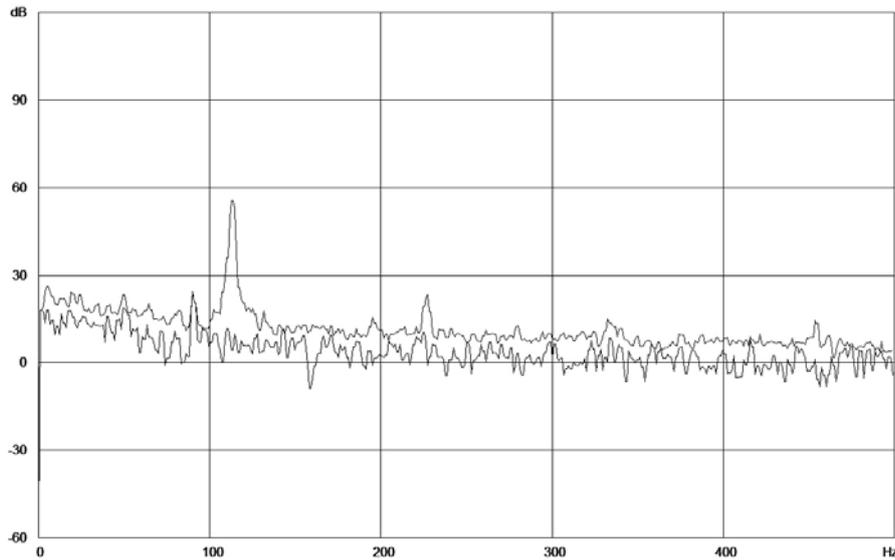


Abbildung 3 Spektrum einer angeblasenen Weinflasche (oberer Linienzug) und Untergrund (unterer Linienzug). Das Spektrum wurde über einige Millisekunden gemittelt, ist daher weniger verrauscht als der Untergrund. Die Linie bei 115 Hz entspricht der Grundschwingung, ihre Frequenz stimmt größenordnungsmäßig mit dem Wert nach Gleichung (10) überein. Weitere Linien sind an den Stellen der Vielfachen von 115 Hz zu erkennen (Oberwellen). Die Breite der Grundschwingungslinie lässt sich grob zu 2,8 Hz abschätzen, so dass der experimentelle Gütefaktor etwa  $Q = 41$  beträgt. Der Wert ist, wie erwartet, erheblich kleiner als die theoretische Abschätzung  $Q = 1376$ , die nur den Strahlungsverlust berücksichtigt. Das heißt, die Verluste durch Reibung überwiegen bei Weitem.

Resonanzfrequenz des  $A_0$ -Peaks für meine Geige  $f_0 = 273 \pm 5$  Hz. Die Abschätzung nach Gleichung (10) ergab 317 Hz, die Zuordnung des Peaks zur  $A_0$ -Resonanz ist also nicht völlig aus der Luft(!) gegriffen. Die Breite des  $A_0$ -Peaks ist etwa 23 Hz, so dass der Gütefaktor  $Q = 275/23 = 12$  beträgt. Die theoretische Rechnung (Abschätzung) ergibt  $Q = 13,6$ . Diese Zahl ist von derselben Größenordnung und deutet an, dass die Strahlungsdämpfung zumindest überwiegt. Das wird in der Literatur so nicht bestätigt.

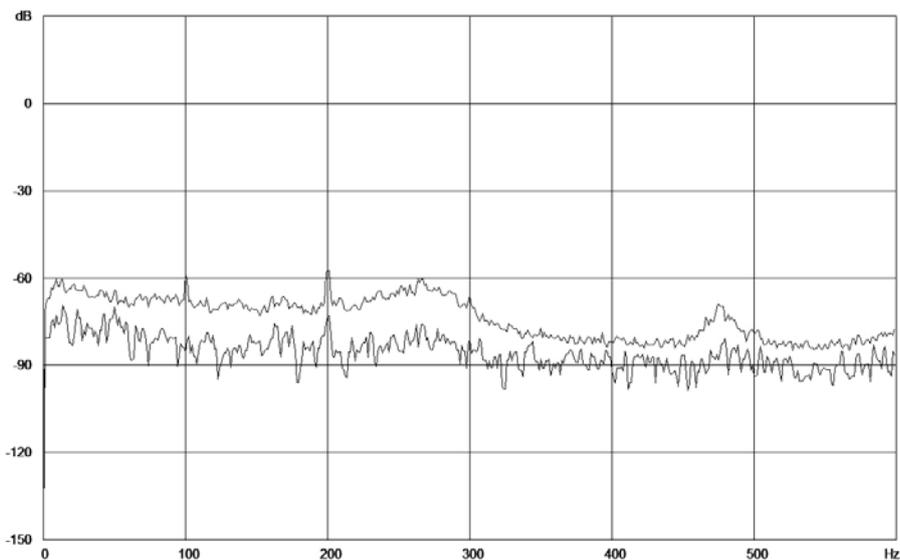


Abbildung 4 Spektrum der Geigenresonanzen unterhalb 600 Hz. Das Spektrum (oberer Linienzug) wurde über einige Millisekunden gemittelt, ist daher weniger verrauscht als der nicht gemittelte Untergrund (unterer Linienzug). Der breite Peak bei etwa 275 Hz entspricht der hier betrachteten Helmholtz- oder  $A_0$ -Resonanz. Bei ihr stellen die  $f$ -Löcher der Geige die Röhre dar, in der sich eine schwingende Luftsäule bildet, während die Luft im Innern des Geigenkorpus als Feder wirkt. Die Frequenz  $f = 275$  Hz des Peaks stimmt mit der Abschätzung  $f = 317$  Hz nach Gleichung (10) nicht überein: die

effektive Rohrlänge der f-Löcher ist offenbar nicht, wie angenommen,  $L = 1$  cm. Die Breite des Peaks ist etwa 23 Hz, so dass der Gütefaktor  $Q = 275/23 = 12$  beträgt. Die theoretische Rechnung (Abschätzung nach Gleichung 13) ergibt  $Q = 13,6$ , eine Zahl von derselben Größenordnung. Bei etwa 475 Hz zeigt sich eine zweite Resonanz. In der Literatur wird sie mit  $A_1$  bezeichnet. Sie stellt zwar eine Schwingung von Luft dar, ist aber nicht vom Helmholtz-Typ. Bei ihr bildet die Luft im Innern des Geigenkörpers eine stehende Welle, und zwar in Längsrichtung der Geige.

Bei etwa 475 Hz zeigt sich eine zweite Resonanz. Sie entspricht einer Schwingung von Luft, ist aber nicht vom Helmholtz-Typ. Bei ihr bildet die (gesamte) Luft im Innern des Geigenkörpers eine stehende Welle, und zwar in Längsrichtung der Geige<sup>7</sup>. Ihre Frequenz lässt sich mit Hilfe der bekannten Formel

$$(15) \quad f = \frac{c}{2L}$$

abschätzen. Dabei ist  $L$  die Länge des Hohlraums, in dem sich die Stehende Welle bildet. Für eine 14-Zoll-Geige mit näherungsweise  $L = 35$  cm erhält man  $f = 342 \text{ ms}^{-1}/0,7 \text{ m} = 488$  Hz, also einen Wert in der Nähe der gemessenen Frequenz.

## 5. Bemerkung zum Schluss

Unterschiedliche Dinge wie Flaschenblasen und Geigenresonanz werden durch Physik miteinander verbunden: Eine Querverbindung auf dem Niveau exakter Logik – das ist in gewisser Weise erstaunlich. Querdenker bewegen sich offenbar auf einem anderen Niveau.

## Anmerkungen und Literatur

<sup>1</sup> Flaschenblasen (Eigene Arbeit).

<sup>2</sup> Coffey, J.: *The Air Cavity, f-Holes and Helmholtz Resonance of a Violin or Viola*, <https://dokumen.tips/documents/the-air-cavity-f-holes-and-helmholtz-resonance.html?page=49>

<sup>3</sup> G. Vandegrift: *Experimental study of the Helmholtz resonance of a violin*, Am. J. Phys. Vol. 61, No. 5, May 1993, p. 415.

<sup>4</sup> siehe z. B. *Gerthsen Physik*, 21. Auflage, bearbeitet von D. Meschede: Kapitel 4.1.2. *Gedämpfte Schwingungen*, Gleichung (4.21)

<sup>5</sup> Lawrence E. Kinsler, Austin R. Frey, Alan B. Coppens, James V. Sanders: *Fundamentals of Acoustics, 4th Edition*, Wiley, December 1999, ISBN: 978-0-471-84789-2 <https://www.wiley.com/en-gb/Fundamentals+of+Acoustics,+4th+Edition-p-9780471847892>

<sup>6</sup> Spectrogram ist ein Freeware-FFT-Programm, benutzte Version *Spectrogram 16.0*, kann heruntergeladen werden von <http://ptf.com/spectrogram/spectrogram+16+windows+7/>

<sup>7</sup> In der Literatur mit  $A_1$  bezeichnet.