FA-VA5 / Smith-Diagramm

Messung der Impedanz von Antennen und Schaltkreisen und ihre Darstellung im Smith-Diagramm

Inhalt

Nr	Thema
00	Definitionen, Formeln, ...
01	Komplexe Zahlen
02	Komplexe Rechnung in der E-Technik
03	FA-VA5-Messgerät
04	Reflexionsfaktor und VSWR
05	Smith-Diagramm
06	Navigation im Smith-Diagramm
07	L-Netzwerk Anpassung
08	Messungen an Antennen (z.B. fres vs Höhe)
09	Messungen an RLC-Serienkreis
10	Q-Wert Parallelkreis (Simulation HF-Cavity)

0. Formeln

Impedanz (Scheinwiderstand)

(1) $$Z = R + jX$$

R = Resistanz (Wirkwiderstand), X = Reaktanz (Blindwiderstand)

Admittanz (Scheinleitwert)

(2) $$Y = G + jB$$

G = Konduktanz (Wirkleitwert), B = Suszeptanz (Blindleitwert)

Reflextionsfaktor

(3) $$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} = \frac{Y_0 - Y}{Y_0 + Y} = |\Gamma| \angle \phi$$

mit Z_0 = Referenz-Impedanz (meist Z_0 = 50 Ω), $|\Gamma|$ = Betrag von Γ, ϕ = arg(Γ): Phasenwinkel, Argument

Stehwellenverhältnis (*VSWR*, auch *SWR*)

(4) $$VSWR = \frac{U_v + U_r}{U_v - U_r} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

mit U_v = Spannung der vorlaufenden Welle, U_r = Spannung der rücklaufenden Welle, beides Effektivwerte. Damit ist

(5) $$|\Gamma| = \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} = \frac{|Z - Z_0|}{|Z + Z_0|} = \sqrt{\frac{P_r}{P_v}} = 10^{-\frac{RL}{20}} ,$$

wobei P_r = reflektierte Leistung (in Watt), P_v = vorlaufende Leistung (in Watt).

Reflektierte Leistung - Genauer: Verhältnis der reflektierten (P_r) zur vorlaufenden Leistung (P_v)

(6) $$\frac{P_r}{P_v} = |\Gamma|^2 .$$

Wird oft in Prozent (der vorlaufenden Leistung) angegeben.

Rückflussdämpfung (Return Loss) = Verhältnis der reflektierten zur vorlaufenden Leistung P_r/P_v in der Einheit dB

(7) $$RL = -10 \cdot \log \frac{P_r}{P_v} = -10 \cdot \log |\Gamma|^2 = -20 \cdot \log |\Gamma| = -20 \cdot \log \frac{VSWR - 1}{VSWR + 1} = -20 \cdot \log \frac{|Z - Z_0|}{|Z + Z_0|}$$

Beachte: Ein großer Wert von RL bedeutet einen geringen Anteil an reflektierter Leistung, also wenig Verlust durch Reflexion. Da Pr/Pv ≤ 1, ist der Logarithmus Null oder negativ, also RL positiv. Je kleiner Pr/Pv ist, desto größer ist der Betrag von log(Pr/Pv), und damit auch RL.

1. Komplexe Zahlen

Es gibt quadratische Gleichungen, die in der Menge $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen[1] nicht lösbar sind, zum Beispiel die Gleichung

(1) $\quad x^2 + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = -1.$

Denn es gibt keine Zahl $x \in \boldsymbol{R}$, die, mit sich selbst multipliziert, -1 ergibt. Eine Zahl mit dieser Eigenschaft muss daher aus einer anderen „Welt“ als $\boldsymbol{R}$ sein. Man nennt sie i und definiert

(2) $\quad i^2 = -1.$

Dann kann man die Lösung von Gl. (1) schreiben

(3) $\quad x^2 = -1 \;\Leftrightarrow\; x = \sqrt{-1} \vee x = -\sqrt{-1} \;\Leftrightarrow\; x = i \;\vee\; x = -i\;.$

Die Zahl i wird *imaginäre Einheit* genannt[2]. Ein weiteres Beispiel für eine quadratische Gleichung, die in $\boldsymbol{R}$ keine Lösungen hat, ist

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Die Lösungsformel (*pq-Formel*) ergibt, wenn man $i^2 = -1$ beachtet,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{1-5} \;\vee\; x = 1 - \sqrt{1-5}\\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{-4} \;\vee\; x = 1 - \sqrt{-4}\\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 + \sqrt{4}\sqrt{-1} \;\vee\; x = 1 - \sqrt{4}\sqrt{-1}\\
&\Leftrightarrow \quad x = 1 + 2i \;\vee\; x = 1 - 2i
\end{aligned}$$

Zahlen der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in R$ heißen *komplexe Zahlen*, x heißt *Realteil*, y *Imaginärteil* von z.

Die Lösungen $x_1 = 1 + 2i$ und $x_2 = 1 - 2i$ nennt man im Übrigen zueinander *konjugiert*. Zu jeder komplexen Zahl erhält man die zu ihr *konjugiert komplexe Zahl*, indem man das Vorzeichen des Imaginärteils umkehrt. Der Übergang zur konjugiert komplexen Zahl wird durch einen hochgestellten Stern gekennzeichnet. Das heißt, die zu $a = x + iy$ konjungierte Zahl ist $a^* = x - iy$.

Erstaunlich ist, dass man erstens keine weiteren Zahlen „erfinden“ muss, um auch algebraische Gleichungen höheren Grades lösen zu können, und zweitens mit komplexen Zahlen genau so rechnet wie mit reellen Zahlen – vorausgesetzt, man beachtet $i^2 = -1$. Bei der Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen werden Real- und Imaginärteil getrennt verarbeitet. Das heißt, man rechnet, wenn $z = x + iy$ und $w = u + iv$ gegeben sind,

(6) $\quad z \pm w = (x + iy) \pm (u + iv) = (x \pm u) + i(y \pm v).$

Bei der Multiplikation ist das Distributivgesetz zu beachten und außerdem $i^2 = -1$ zu setzen:

(7) $\quad z \cdot w = (x + iy)(u + iv) = xu + ixv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu).$

Der Sonderfall

(8) $\quad z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 + xyi - xyi - i^2y^2 = x^2 + y^2$

kommt in der Praxis oft vor. Meist kürzt man ab $z \cdot z^* = z^2$. Weiter unten zeigt sich, dass man die Quadratwurzel aus $z \cdot z^*$ als *Betrag* $|z|$ der Zahl z definiert:

(9) $\quad |z| = \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{x^2 + y^2}\;.$

Die Möglichkeit, algebraische Gleichungen beliebigen Grades lösen zu können, erkauft man sich damit, dass komplexe Zahlen nicht angeordnet werden können. Das heißt, zwischen zwei komplexen Zahlen z und w existiert *keine* größer- und kleiner-Relation $z > w$ bzw. $z < w$. Dagegen kann man nach einem Vorschlag von *C. WESSEL* (1745 – 1818) und *C. F. GAUSS* (1777 – 1855) komplexe

Zahlen in einem (2-dimensionalen) Koordinatensystem darstellen. Dazu trägt man den Realteil auf der *x*-Achse, den Imaginärteil auf der *y*-Achse ab. Jeder komplexen Zahl entspricht so genau ein Punkt der *x*-*y*-Ebene und umgekehrt jedem Punkt genau eine komplexe Zahl. Die Koordinatenebene erhält in diesem Fall den Namen *Gauß'sche Zahlenebene* (Abb. 1).

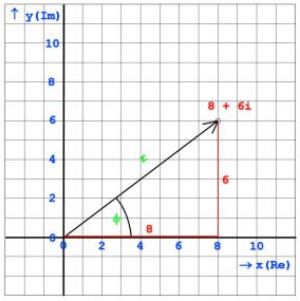

Abb. 1 Gauß'sche Zahlenebene mit Darstellung der komplexen Zahl z = 8 + 6i. Der Realteil wird in x-Richtung, der Imaginärteil in y-Richtung aufgetragen. Die Zahl z = 8 + 6i lässt sich durch den Punkt (8, 6) oder durch den Pfeil vom Nullpunkt zu diesem Punkt darstellen. Die Länge r dieses Pfeils ist der Betrag der Zahl, $r = |8 + 6i| = \sqrt{(8^2 + 6^2)} = \sqrt{100} = 10$. Der Winkel ϕ, den der Pfeil mit der positiven x-Achse bildet, heißt das Argument der Zahl. Hier ist $\phi = \arctan(6/8) = 0{,}64350 \approx 36{,}87°$.

Oft ist es sinnvoll, komplexe Zahlen als zweidimensionale *Vektoren* darzustellen[3]. Der Vektor, den man der Zahl *z* zuordnet, wird durch einen Pfeil repräsentiert, der vom Nullpunkt des Koordinatensystems ausgeht und beim Zahlpunkt für *z* endet (Abb. 1). Die Darstellung komplexer Zahlen in der Zahlenebene legt es nahe, als *Betrag* $|z|$ einer Zahl *z* den Abstand des Zahlpunktes vom Nullpunkt beziehungsweise die Länge des Zahlpfeils zu definieren. Aus dieser Definition folgt

(10) $$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Gibt man zusätzlich zum Betrag $|z|$ den Winkel ϕ an, den der Vektorpfeil mit der positiven *x*-Achse bildet, gelangt man zur *Polarform* einer komplexen Zahl. Den Winkel ϕ nennt man auch das *Argument* von *z*, und für den Betrag $|z|$ wird in diesen Zusammenhang in der Regel das Symbol *r* benutzt. Die Zahlen *r* und ϕ heißen *Polarkoordinaten* von *z*, *x* und *y* bezeichnet man dagegen als *kartesische Koordinaten*. Nach Abb. 1 gilt

(11) $$x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi\,.$$

Daraus folgt als Darstellung in Polarform

(12) $$z = r\left(\cos\phi + i\sin\phi\right)\ .$$

Zur Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten benutzt man

(13) $$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}\,,$$

falls $x \neq 0$. Ist $x = 0$, gilt $\phi = \pi/2$ für $y > 0$ und $\phi = -\pi/2$ für $y < 0$. Für $x = y = 0$ ist ϕ nicht definiert.

Anmerkungen

[1] Die Menge ***R*** der reellen Zahlen umfasst die ganzen Zahlen, die Brüche und die irrationalen Zahlen. Beispiel einer irrationalen Zahl: $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$.

[2] In der Elektrotechnik heißt die imaginäre Einheit »*j*«, da der Buchstabe »*i*« für die Stromstärke reserviert ist.

[3] Streng genommen sind es Pfeile (»Zeiger«), die sich wie Vektoren addieren lassen.

2. Komplexe Rechnung in der Elektrotechnik

2.1 »*j*« als Symbol für die imaginäre Einheit

Zunächst ersetzen wir das »*i*« als Symbol für die imaginäre Einheit in der Mathematik durch den Buchstaben »*j*«, um Verwechslungen mit der Stromstärke zu vermeiden.

2.2 Exponentialform

Außerdem benutzen wir die *EULER*sche Gleichung[1] $\cos\phi + j\sin\phi = e^{j\phi}$, um die Polarform einer komplexen Zahl in die kürzere Exponentialform zu verwandeln. Wir schreiben also

(1) $$z = r(\cos\phi + j\sin\phi) = r\,e^{j\phi},$$

wobei r der Betrag von z ist,

$$r = |z|,$$

und ϕ der Winkel, den der Zahlpfeil mit der reellen Achse bildet. Der Winkel ϕ wird auch das Argument von z genannt:

$$\phi = \arg(z)\ .$$

Also ist

(2) $$z = |z|\cdot e^{j\cdot\arg(z)}$$

In der komplexen (Wechselstrom-)Rechnung wird die Exponentialform häufig neben der kartesischen Schreibweise verwandt[2].

Will man in der kartesischen Form Real- und Imaginärteil nicht explizit angeben, bezeichnet man sie pauschal mit $\mathrm{Re}(z)$ bzw. $\mathrm{Im}(z)$:

(3) $$z = \mathrm{Re}(z) + j\,\mathrm{Im}(z).$$

Für die Umwandlung in die Exponentialform benutzt man

(4) $$|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \quad \text{(Betrag)}$$

$$\arg(z) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)} \quad \text{(Argument oder Winkel).}$$

Oft werden Betrag und Argument (Winkel) zu einem Zahlenpaar zusammengefasst

$$z = (|z|, \angle\arg(z)).$$

Das Zeichen »∠« kennzeichnet den Winkel. Er wird in der Regel in Grad (°) angegeben, bei Rechnungen muss er in das Bogenmaß umgewandelt werden.

2.3 Komplexe Schreibweise in der Wechselstromtechnik

Und jetzt zur komplexen Schreibweise: Wir betrachten eine sinusförmig mit der Zeit t sich ändernde Wechselspannung

(5) $$u(t) = \hat{u}\cos(\omega t)\ ,$$

wobei $\hat{u}$ die Amplitude und ω die Kreisfrequenz ($\omega = 2\pi f$ und f = Frequenz) bedeuten. Die entsprechende komplexe Größe bezeichnen wir durch Unterstreichung, also mit $\underline{u}(t)$. Sie entsteht aus $\hat{u}\cos(\omega t)$, indem man den rein imaginären Term $j\,\hat{u}\sin(\omega t)$ addiert. Das ergibt

(6) $\underline{u}(t) = \hat{u}\left[\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)\right] = \hat{u}\, e^{j\omega t}$,

wobei die tatsächlich messbare Spannung der unverändert übernommene der Realteil von $\underline{u}(t)$ ist.

(7) $u(t) = Re\left[\underline{u}(t)\right] = \hat{u}\cos(\omega t)$.

Komplexe Größen kennzeichnet man generell durch *Unterstreichung*.

Auch bei komplexer Schreibweise stellt man in der E-Technik Wechselströme und -spannungen durch Zeiger dar, die mit der Winkelgeschwindigkeit ω entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen. Die Länge dieser Zeiger entspricht üblicherweise den *Effektivwerten* der Ströme beziehungsweise Spannungen. Effektivwerte bezeichnet man in der Regel durch Großbuchstaben. Diese Übereinkunft übernehmen wir. Weiter unten zeigt sich, dass auch Wechselstrom-Widerstände als komplexe Größen behandelt werden können.

2.4 Rechnung mit reellen Größen (Beispiel: RLC-Serienkreis)

Selbstverständlich ändert die komplexe Schreibweise in keiner Weise die Physik. Sie ist aber eine mathematisch vorteilhafte Formulierung der Wechselstromtechnik. Der Vorteil zeigt sich, wenn man die komplexe Rechnung der Rechnung mit reellen Größen gegenüberstellt. Das soll am Beispiel des *RLC*-Serienkreises (Abbildung 1) geschehen. Bei einem Serienkreis addieren sich die Teilspannungen an Spule (Induktivität *L*), Kondensator (Kapazität *C*) und Widerstand (Wert *R*) zur Gesamtspannung – allerdings nicht arithmetisch, sondern unter Berücksichtigung ihrer relativen Phasenlage.

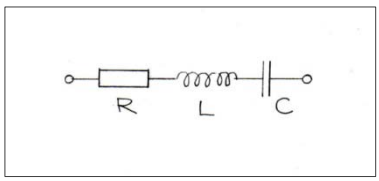

Abb. 1 RLC-Serienkreis

Wir wissen: Die Spannung an der Spule (U_L) eilt dem Strom *I* um 90° voraus (Induktivit**ä**t = Strom sp**ä**t), am Kondensator hinkt sie (U_C) um 90° nach (Kondensat**o**r = Strom v**o**r), während am Widerstand Strom und Spannung (U_R) in Phase sind. Im Zeigerdiagramm (Abbildung 2) legen wir daher den Zeiger für U_R in die Richtung des Zeigers für *I* (In der Abbildung ist das, willkürlich

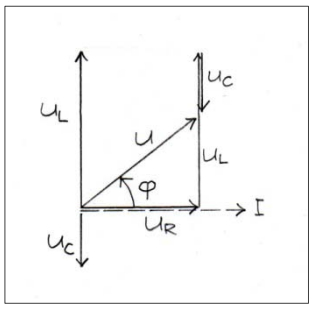

Abb. 2 Phasenlage der Spannungen im RLC-Serienkreis

gewählt, die horizontale Achse.) und zeichnen die Zeiger für U_L und U_C um + 90° beziehungsweise – 90° gegenüber dem Zeiger für *I* gedreht, und zwar im Gegenuhrzeigersinn gedreht. Die Zeiger werden wie Vektoren addiert (Anfang des zweiten Pfeils an Spitze des ersten) und ergeben so Betrag *U* und die Phasenlage φ der Gesamtspannung. Für die Rechnung benötigt man den Satz des Pythagoras und etwas Trigonometrie. Das führt zu folgenden Gleichungen:

(8) $U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2$ (Pythagoras)

(9) $\tan\varphi = \dfrac{U_L - U_C}{U_R}$ (Trigonometrie).

Die Teilspannungen sind

(10) $U_L = \omega L I, \quad U_C = \dfrac{1}{\omega C} I$ und $U_R = R I$.

Also folgt

(11)
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{R^2 I^2 + (\omega L I - \frac{1}{\omega C} I)^2} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \cdot I \; .$$

Die Quadratwurzel ist der Betrag des Scheinwiderstands (der Impedanz Z) des Reihenkreises:

(12) $Z = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \dfrac{1}{\omega C})^2}$.

Für die Phasenverschiebung φ zwischen Strom I und Gesamtspannung U folgt

(13) $\tan\varphi = \dfrac{U_L - U_C}{U_R} = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \dfrac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC}$.

2.5 Komplexe Rechnung (als Beispiel wiederum der RLC-Serienkreis)

Bei der komplexen Rechnung sind die Phasenbeziehungen zwischen den Teilspannungen unseres Kreises in den Faktoren $+j$ beziehungsweise $-j$ verborgen, mit denen die Beträge der Spannungen multipliziert werden. Die komplexe Schreibweise von U_L, U_C und U_R in Gleichung (10) lautet

(14) $\underline{U}_L = j\omega L \underline{I}, \quad \underline{U}_C = \dfrac{1}{j\omega C}\underline{I} = -j\dfrac{1}{\omega C}\underline{I}$ und $\underline{U}_R = R\underline{I}$.

Division durch $\underline{I}$ ergibt die entsprechenden Terme für die Wechselstromwiderstände $\underline{Z}$. Bekanntlich bezeichnet man die Blindwiderstände (Reaktanzen) von Spule und Kondensator mit X_L bzw. X_C, während der Wirkwiderstand (Resistanz) wie beim Gleichstrom R genannt wird:

(15) $\underline{Z}_L = jX_L = j\omega L, \quad \underline{Z}_C = jX_C = \dfrac{1}{j\omega C} = -j\dfrac{1}{\omega C}$ und $\underline{Z}_R = R$.

Diese Ausdrücke lassen sich, da sie komplexe Zahlen sind, als Pfeile in der komplexen Ebene darstellen. Der Pfeil für den Wirkwiderstand R liegt als positive reelle Zahl auf der positiven reellen

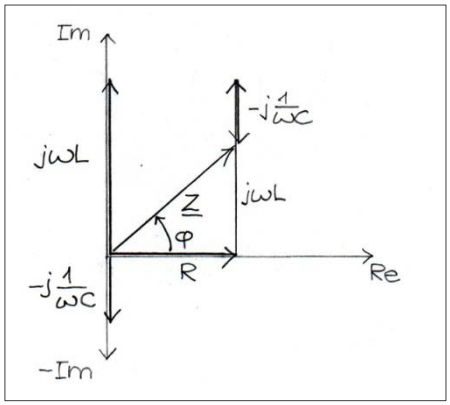

Abb. 3 Zeiger der Wechselstromwiderstände im RLC-Serienkreis

Achse, der Pfeil für den induktiven Blindwiderstand $+j\omega L$ als imaginäre Zahl mit positivem Betrag auf der positiven imaginären Achse, und der Pfeil für den kapazitiven Blindwiderstand $-j/\omega C$ entsprechend auf der negativen imaginären Achse (Abbildung 3). Die relative Lage dieser Pfeile ist dieselbe wie die der Zeiger für die Spannungen U_R, U_L und U_C in Abbildung 2. Die Phasenbeziehungen zwischen den Spannungen haben sich sozusagen auf die Wechselstrom-Widerstände übertragen. Dies gilt nicht nur für unser Beispiel des *RLC*-Reihenkreises, sondern generell: In jedem Netzwerk sind die Wechselstrom-Widerstände für Spule, Kondensator und ohmscher Widerstand durch die Ausdrücke in Gleichung (15) gegeben. Man kann man mit R, $+j\omega L$ und $-j/\omega C$ wie in einem Gleichstromnetz rechnen.

Unser *RLC*-Kreis hat demnach den Gesamt-Scheinwiderstand (die Gesamt-Impedanz)

$$\text{(16)} \qquad \underline{Z} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) .$$

Der Betrag der Impedanz ergibt sich jetzt rein rechnerisch (ohne Rückgriff auf die Geometrie) zu

$$\text{(17)} \qquad \begin{aligned} Z = |Z| = \sqrt{\underline{Z}\cdot\underline{Z}^*} &= \sqrt{\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]\cdot\left[R - j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right]} \\ &= \sqrt{R^2 - j^2(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \\ &= \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \end{aligned} ,$$

und die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung zu

$$\text{(18)} \qquad \tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega RC} .$$

Das sind dieselben Formeln wie im Fall der Rechnung mit reellen Größen.

2.6 Ein weiteres Beispiel: Der RC-Tiefpass

Abbildung 4 zeigt ein einfaches *RC*-Tiefpass-Filter. Wir rechnen mit komplexen Größen. Die Eingangsspannung $\underline{U}_E$ treibt den Strom $\underline{I}$ durch den Widerstand R und den Kondensator C. Dadurch wird das Filter zu einem Spannungsteiler mit den komplexen (Wechselstrom-)Widerständen $\underline{Z}_R = R$ und $\underline{Z}_C = -j/\omega C$. Die Eingangsspannung $\underline{U}_E$ fällt an der Reihenschaltung von $\underline{Z}_R$ und $\underline{Z}_C$ ab, die

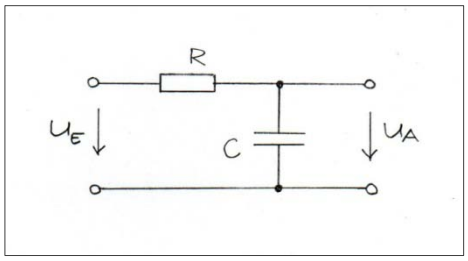

Abb. 4 RC-Tiefpass-Filter

Ausgangsspannung $\underline{U}_A$ nur an $\underline{Z}_C$. Daher gilt für das Verhältnis $\underline{U}_A/\underline{U}_E$ von Ausgangs- zu Eingangsspannung, die sogenannte Übertragungsfunktion $\underline{H}$

$$(19)\qquad \underline{H} = \frac{\underline{U}_A}{\underline{U}_E} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}\underline{I}}{R\underline{I} + \frac{1}{j\omega C}\underline{I}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\ .$$

Es ist sinnvoll, den Nenner reell zu machen. Deshalb erweitert man den Bruch mit $1 - j\omega RC$, dem konjugiert Komplexen von $1 + j\omega RC$. Das ergibt

$$(20)\qquad \underline{H} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\cdot\frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}\ .$$

Die mit einem Voltmeter oder Oszilloskop messbare Größe ist das Verhältnis U_A/U_E, also der Betrag der Übertragungsfunktion $\underline{H}$, und die Phasenlage der Ausgangsspannung, das Argument von $\underline{H}$. Beide Größen sind abhängig von der Frequenz, deshalb $\underline{H}(\omega)$. Für den Betrag von $\underline{H}(\omega)$ erhält man

$$(21)\qquad \begin{aligned} \left|\underline{H}(\omega)\right| = \sqrt{\underline{H}(\omega)\cdot\underline{H}^*(\omega)} &= \sqrt{\frac{1 - j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}\cdot\frac{1 + j\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + (\omega RC)^2}{\left[1 + (\omega RC)^2\right]^2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + (\omega RC)^2}} \end{aligned}\ .$$

Das Argument (der Phasenwinkel) von $\underline{H}(\omega)$ ist

$$(22)\qquad \begin{aligned} \arg(\underline{H}(\omega)) = \arctan\frac{\mathrm{Im}(\underline{H}(\omega))}{\mathrm{Re}(\underline{H}(\omega))} &= \arctan\left(\frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2}\,\frac{1 + (\omega RC)^2}{1}\right) \\ &= \arctan(-\omega RC) \end{aligned}\ .$$

Die Darstellung von $\left|\underline{H}(\omega)\right|$ und $\arg(\underline{H}(\omega))$ als Funktion der Frequenz ω ist das bekannte Bode-Diagramm.

Anmerkungen

[1] Ferdinand Euler (1707 – 1783). Die Formel $\cos\phi + j\sin\phi = e^{j\phi}$ wurde 1743 von Euler bewiesen.

[2] Arthur E. Kennelly und Charles P. Steinmetz wandten die Eulersche Formel 1893 zum ersten Mal auf Rechnungen in der Elektrotechnik an.

3. Messgerät FA-VA5

3.1 Impedanzmessung mit Hilfe des komplexen Ohmschen Gesetzes

Auf der Ham Radio 2018 präsentierte Michael Knitter (*DG5MK*) den von ihm entwickelten Antennenanalysator *FA-VA5*. Es ist sinnvoll, sich den gesamten Vortrag auf Youtube[1] anzusehen. Eine pdf-Datei der im Vortrag gezeigten Bilder ist im Internetportal von *DG5MK* unter *Downloads* zugänglich[2]. Außerdem gibt es im *Funkamateur* eine ausführliche Beschreibung des Geräts[3].

Im Folgenden wird auf einige Bilder des Vortrags[2] verwiesen (z. B. »Bild #5 des Vortrags«). Sie werden hier aus urheberrechtlichen Gründen nicht gezeigt. Vorschlag: Die Bilder während der Lektüre dieses Artikels aus dem Netz in ein (zweites) Fenster auf dem Bildschirm herunterladen.

Das Messverfahren des *FA-VA5* bis ins Detail zu verstehen ist nicht einfach – ich selber und vermutlich auch andere sind damit überfordert. Knitter erklärt deshalb (Bild #5 des Vortrags[1,2]) zunächst an einem Wechselstromkreis das Problem des Verfahrens: Es geht darum, mit Hilfe des (komplexen) Ohmschen Gesetzes die Impedanz eines unbekannten Objekts zu ermitteln. Das unbekannte Objekt wäre in unserem Fall die Antenne. Die Antenne ist in Bild #5 durch ihre Impedanz $\underline{Z}$ dargestellt ($\underline{Z}$ als komplexe Größe mit Unterstreichung). Der Kreis enthält als Stromquelle einen *HF*-Generator mit dem Innenwiderstand R_i und besteht aus der Serienschaltung eines externen ohmschen Widerstands R und der schon erwähnten Antenne (Impedanz $\underline{Z}$).

Die Antennenimpedanz $\underline{Z}$ ergibt sich als Quotient aus dem Spannungsabfall $\underline{U}_Z$ über der Antenne und dem durch sie hindurchfließenden Strom $\underline{I}_Z$. Dabei ist $\underline{I}_Z$ nach dem Ohmschen Gesetz gleich der Spannung $\underline{U}_R$ am externen ohmschen Widerstand dividiert durch R:

$$(1) \qquad \underline{Z} = \frac{\underline{U}_Z}{\underline{I}_Z} \qquad \text{und} \qquad \underline{I}_Z = \frac{\underline{U}_R}{R}, \qquad \text{also} \qquad \underline{Z} = R\,\frac{\underline{U}_Z}{\underline{U}_R}\ .$$

Gibt man der Spannung $\underline{U}_\mathrm{R}$ die Phase Null und $\underline{U}_\mathrm{Z}$ die Phase φ (relativ zur Phase von $\underline{U}_\mathrm{R}$), folgt

$$(2) \qquad \underline{Z} = R\frac{U_Z\,e^{j\omega\varphi}}{U_R\,e^{j\omega 0}} = R\frac{U_Z}{U_R}e^{j\omega\varphi} = R\frac{U_Z}{U_R}(\cos\varphi + j\sin\varphi)\ .$$

Bei komplexer Rechnung zeigt sich also, dass Real- und Imaginärteil von $\underline{Z}$ bei Kenntnis von R aus der Messung der Beträge von U_Z und U_R und der Messung des Phasenwinkels φ folgt. Diese drei Größen müssen also im Prinzip vom *FA-VA5*-Analysator bestimmt werden.

3.2 Prinzip der Messung (soweit ich das verstanden habe)

Bild #6 des Vortrags zeigt das Blockschaltbild des *FA-VA5*-Analysators. Antenne (*Z*) und Widerstand sind hier Teil einer *HF*-Messbrücke. Gemessen werden die Spannung U_1 im Brückenzweig und die insgesamt an der Brücke anliegende Spannung U_2. Am Anfang der Signalkette steht der *HF*-Signalgenerator (*SI* 5351). Er sendet ein Rechtecksignal der gewünschten Frequenz an die mit *HF*-Testkopf bezeichnete Messbrücke – und damit an die Antenne. In der Messbrücke wird das Signal U_1 abgegriffen und auf eine geeignete Zwischenfrequenz analog heruntergemischt (*ZF*-Mischer 74*LVC*4066). Es durchläuft dann einen Antialiasing-Filter (*AA*-Filter). Der begrenzt die Bandbreite des Signals so, dass sie mit der Abtastrate des nachfolgenden Analog-Digitalwandlers verträglich ist (Nyquist). Auch der lokale Oszillator liefert an den Mischer ein Rechtecksignal. Man kann zeigen, dass sich in diesem Fall nach der *AA*-Filterung ein dreiecksförmiges Signal ergibt (*IF Analog*). Dieses wird abgetastet (*AD*-Wandler *ADU MCP*3911) und liegt damit digitalisiert vor (*IF Sampled*) . Die anschließende Verarbeitung erfolgt auf der digitalen Ebene. Sie besteht, soweit ich das übersehe, im Wesentlichen aus digitalen Tiefpass-Filtern (*Digitales Filter*, *Bandpass*). Im Fall des Messbereichs 0,01 MHz … 200 MHz verarbeitet man die Grundwelle des *ZF*-Signals, im Bereich 200 MHz … 600

MHz die dritte Harmonische. Das Hilbert-Filter erzeugt eine Phasenverschiebung des Signals um 90°. Die im Bild gezeigte Kurve (Diagramm rechts oben) ist offenbar die Durchlasskurve des Hilbert-Filters. Aus dem ursprünglichen und dem um 90° verschobenen Hilbert-Filter-Signal (Diagramm rechts unten) gewinnt man Betrag und Phase des in der Messbrücke abgegriffenen Signals.

Das Antialiasing-Filter (*AA*-Filter) ist im Prinzip ein Tiefpassfilter. Es wird in der Regel einem Analog-Digital-Wandler (*AD*-Wandler) vorgeschaltet. Nach Nyquist erzeugen Signalfrequenzen, die größer sind als die halbe Abtastfrequenz des *AD*-Wandlers, im Spektrum des digitalisierten Signals Anteile, die nicht im Analogsignal vorhanden sind. Sie können zu Fehlinterpretationen führen und werden deshalb vor der Digitalisierung entfernt oder zumindest unterdrückt.

3.3 Etwas Mathematik (Wie kommt das Dreieckssignal zustande?)

In Bild#7 des Vortrags erklärt Michael *DG5MK*, wie die Dreiecksform des Mischsignals (Diagramm *IF-Analog* der vorherigen Abbildung) entsteht. Der Mischer erhält, wie sollte es anders sein, zwei Signale: (1) die in der Messbrücke (*HF-Testkopf*) abgegriffene Spannung U_1, (2) das Signal des lokalen Oszillators (*LO-Signal*). Beide Signale sind rechteckförmig. Die Mathematik lehrt, dass sich ein mit der Zeit rechteckförmig veränderndes Signal in eine Reihe zerlegen lässt, in der neben der Grundwelle nur Oberwellen mit ungeradzahligem Vielfachen der Grundfrequenz enthalten sind. In den Formeln (oben in der Abbildung) erkennt man den Gleichstromanteil $U_b/2$, die Grundschwingungen mit den (Kreis-)Frequenzen ω_s (Eingangssignal) bzw. ω_0 (Lokaler Oszillator), und die ersten beiden Oberwellen: die jeweils dritte und fünfte Harmonische mit $3\omega_{s,0}$, $5\omega_{s,0}$ – und zwar mit alternierendem Vorzeichen. Die Mischung der beiden Signale ist, mathematisch betrachtet, eine Multiplikation. Sie erzeugt nach der Regel "multipliziere jeden Term der einen Klammer mit jedem Term der anderen Klammer" die in der Tabelle aufgeführten Produktsignale. Diese stellen ein Frequenzgemisch dar, dessen oberes Ende offen wäre – wenn ihnen nicht das nachfolgende Tiefpass-Filter (*AA-Filter*) im Wege stünde. Es filtert aus diesem Frequenzgemisch nur die Schwingung mit den niedrigsten Frequenzen heraus, also die Differenzschwingungen mit $\omega_s - \omega_0$, $3\omega_s - 3\omega_0$, $5\omega_s - 5\omega_0$, usw. Sie sind, einschließlich Gleichstromanteil, in den blau unterlegten Tabellenkästchen gekennzeichnet. Addiert man sie zu einer Reihe auf, ergibt sich die Dreiecksschwingung unter *Signal Ausgang Mischer nach Tiefpass (AA-Filter)*. Im Messbereich bis 200 MHz wertet der *FA-VA5*, wie schon gesagt, die Grundschwingungs-Differenz aus, oberhalb 200 MHz die dritte Harmonische mit $3\omega_s - 3\omega_0$. ….

Soweit die Bemerkungen zur Präsentation von *DG5MK* auf der Ham Radio 2018. Hoffentlich ist klar geworden, dass auch ich das Prinzip des *FA-VA5* letztlich nicht verstanden habe.

Anmerkungen

[1] Youtube: https://www.youtube.com/watch?v=ryazPDSNDLU,

[2] Präsentation *Antennen Analysator Hamradio 2018*: https://www.dg5mk.de/pages/downloads.php

[3] Michael Knitter: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (1)*, Funkamateur **67** (2018), S. 322 und: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (2)*, Funkamateur **67** (2018), S. 436

4. Reflexionsfaktor und VSWR

4.1 Messung der Antennenimpedanz und Kalibrierung des FA-VA5

Der Antennenanalysator *FA-VA5* von Michael Knitter[1] (*DG5MK*) misst, nach Vorgabe der Frequenz, die Impedanz des gesamten Schaltungsnetzes, das an seiner Ausgangsbuchse anliegt. Das kann die Antenne sein (einschließlich Zuleitung), ein einzelnes Bauelement – beispielsweise eine Spule oder ein Quarz, oder eine Schaltung wie zum Beispiel ein *RLC*-Schwingkreis.

Bei diesen Messungen gibt es ein grundsätzliches Problem: Jeder Stecker oder jedes Zuleitungskabel verändert die Impedanz des Messobjekts in zum Teil erheblicher Weise. Eine Lambda-Viertel-Leitung beispielsweise transformiert von hochohmig auf niederohmig oder umgekehrt. Dieser Einfluss muss vor der eigentlichen Messung kompensiert werden. Das geschieht, indem man statt des Messobjekts drei Referenzobjekte vermisst: Einen Kurzschluss (*Short*), ein offenes Ende (*Open*) und einem Abschlusswiderstand (*Load*) mit dem Wert der Systemimpedanz – in unserem Fall 50 Ohm. Diese *Short-Open-Load*-Kompensationsmethode (*SOL-Kalibrierung)* kann man so vornehmen, dass die Zuleitung zum Messobjekt die interessierende Impedanz nicht verändert. Dazu bringt man die Referenzobjekte (Kurzschlussbügel, Offenes Ende und 50 Ohm-Widerstand) am Ende der Leitung, also an den Klemmen des Messobjekts, an und misst die von dort reflektierten Signale. Der *FA-VA5* berechnet aus diesen Signalen die Korrekturfaktoren für die eigentliche Messung. Die *SOL*-Referenzobjekte sind im Handel erhältlich, meist werden sie in *BNC*-Stecker integriert.

4.2 Impedanz, Reflexionsfaktor und VSWR

Aus der am Einspeisepunkt der Antenne gemessenen Impedanz Z ergeben sich Reflexionsfaktor Γ und Stehwellenverhältnis *VSWR*. Bezeichnet man die Systemimpedanz mit Z_0 (üblich ist $Z_0 = 50\ \Omega$), gilt

$$\Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \quad . \tag{1}$$

Da Z komplex ist, folgt, dass auch Γ aus Real- und Imaginärteil besteht. Aus dem *Betrag* von Γ ergibt sich das Stehwellenverhältnis zu

$$VSWR = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad . \tag{2}$$

Das Stehwellenverhältnis *VSWR* ist im Gegensatz zu Γ eine reelle Zahl. Ein Zahlenbeispiel: Der Analysator misst bei der Frequenz $f = 131{,}14$ MHz eine Impedanz $Z = R + jX = (60{,}13 - j\,4{,}19)\ \Omega$. Nach Gleichung (1) ist dann der (komplexe) Reflexionsfaktor

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \frac{60{,}13 - j4{,}19 - 50}{60{,}13 - j4{,}19 + 50} = \frac{10{,}13 - j4{,}19}{110{,}13 - j4{,}19} = \frac{10{,}13 - j4{,}19}{110{,}13 - j4{,}19} \cdot \frac{110{,}13 + j4{,}19}{110{,}13 + j4{,}19} \\
&= \frac{10{,}13 \cdot 110{,}13 + 10{,}13 \cdot j4{,}19 - j4{,}19 \cdot 110{,}13 - j^2 4{,}19^2}{110{,}13^2 + 110{,}13 \cdot j4{,}19 - j4{,}19 \cdot 110{,}13 - j^2 4{,}19^2} \\
&= \frac{1115{,}62 + j42{,}44 - j461{,}45 + 17{,}56}{12128{,}6 + 17{,}56} = \frac{1133{,}18 - j419{,}01}{12146{,}2} \\
&= 0{,}09330 - j\,0{,}03450
\end{aligned} \tag{3}$$

Der Betrag von Γ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
|\Gamma| &= \sqrt{\Gamma \cdot \Gamma^*} = \sqrt{(0{,}09330 - j\,0{,}03450) \cdot (0{,}09330 + j\,0{,}03450)} \\
&= \sqrt{0{,}09330^2 + 0{,}03450^2} \quad . \\
&= 0{,}09947
\end{aligned} \tag{4}$$

Das Stehwellenverhältnis ist dann

$$(5) \qquad VSWR = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+0{,}09947}{1-0{,}09947} = \frac{1{,}09947}{0{,}90053} = 1{,}2209 \ .$$

Im Übrigen verhält sich die Antenne wegen des negativen Blindwiderstands (der negativen Reaktanz) bei der genannten Frequenz (f = 131,14 MHz) wie die Serienschaltung einer Kapazität C und eines ohmschen Widerstands R. Dabei ist R = 60,13 Ω, und aus dem Betrag von X (= 4,19 V/A) folgt

$$(6) \qquad C = \frac{1}{2\pi f |X|} = \frac{1}{2\pi \cdot 131{,}14 \cdot 10^6 \frac{1}{s} \cdot 4{,}19 \frac{V}{A}} = 2{,}896 \cdot 10^{-10} \frac{As}{V} = 289{,}6 \ pF \ .$$

Will man die Abhängigkeit der Antennenimpedanz (und damit die der Größen Γ und *VSWR*) von der Frequenz bestimmen, benutzt man die *sweep*-Funktion des *FA-VA5*: Ein vorgegebener Frequenzbereich wird in kleinen Schritten überstrichen und dabei das *Z*, korrigiert auf den Kabeleffekt, punktweise bestimmt. Die Messpunkte (je nach Vorgabe jeweils Real- und Imaginärteil von *Z*, das *VSWR* oder weitere Größen) werden in einem Punktmatrix-Display dargestellt.

4.3 Rechnersteuerung des FA-VA5 (USB-Modus)

Der Analysator kann über ein *USB*-Kabel an einen Rechner angeschlossen werden und lässt sich dann softwaremäßig steuern. Die Software wurde von Thomas Baier[3] (*DG8SAQ*) für einen Vektor-Netzwerk-Analysator geschrieben und von ihm an den *FA-VA5* angepasst[4]. Das Programm

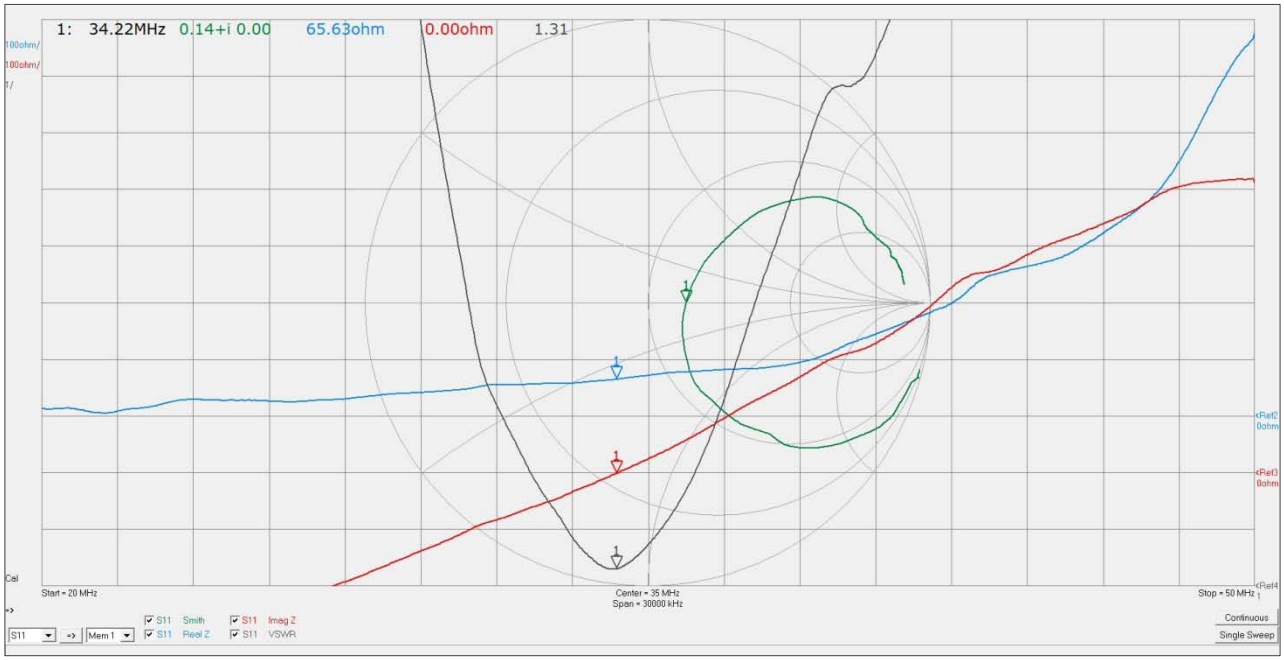

Abbildung 1 Ergebnis der Messung an einem mittengespeisten Dipol der Länge L = 4 m im Frequenzbereich zwischen 20 und 50 MHz. Blau: Realteil R der Impedanz, Rot: Imaginärteil X der Impedanz Z (= R + jX). Schwarz: Stehwellenverhältnis VSWR, Grün: Reflexionsfaktor im Smith-Diagramm. Die Dreiecke markieren die Stelle, an der der Imaginärteil durch Null geht. Die zugehörige Frequenz f = 34,22 MHz ist die Resonanzfrequenz der Antenne. Das Stehwellenverhältnis VSWR hat dort den Wert 1,31.

richtet man beispielsweise so ein, dass es die Ortskurve des Reflexionsfaktors im einem Smith-Diagramm darstellt und, in einem kartesischen Koordinatensystem, den Frequenzgang des Real- und Imaginärteils der Impedanz (Abbildung 1). Aus dem Reflexionsfaktor bzw. der Impedanz werden weitere Größen abgeleitet, deren Frequenzverlauf wahlweise auf dem Bildschirm wiedergegeben wird – in der Abbildung ist es das Stehwellenverhältnis *VSWR*. Meist liegen die Messpunkte dicht beieinander, so dass auf dem Bildschirm des Rechners eine durchgehende Kurve entsteht.

4.4 Messung an einem einzelnen Bauelement (z.B. Spule, Kondensator)

Nicht nur im Fall von Antennen, auch bei Bauteilen wie Spule oder Kondensator interessiert in der Regel, wie Induktivität bzw. Kapazität sich in Abhängigkeit von der Frequenz ändern. Um diese Frequenzabhängigkeit zu messen, schließt man statt der Antenne das betreffende Bauelement an die Messbuchse des *FA-VA5* an. Abbildung 2 zeigt das Ergebnis der Messung an einer 10 µH-Ringkernspule. Die Kurve zeigt, dass die Induktivität L im Bereich unterhalb 1 MHz in etwa konstant L = 10 µH beträgt und oberhalb 1 MHz abnimmt. Bei etwa 7,5 MHz ist eine Resonanz sichtbar, oberhalb dieser Frequenz ist der Imaginärteil von Z bis etwa 40 MHz negativ (violette Kurve). Hier verhält sich die Spule wie eine Kapazität.

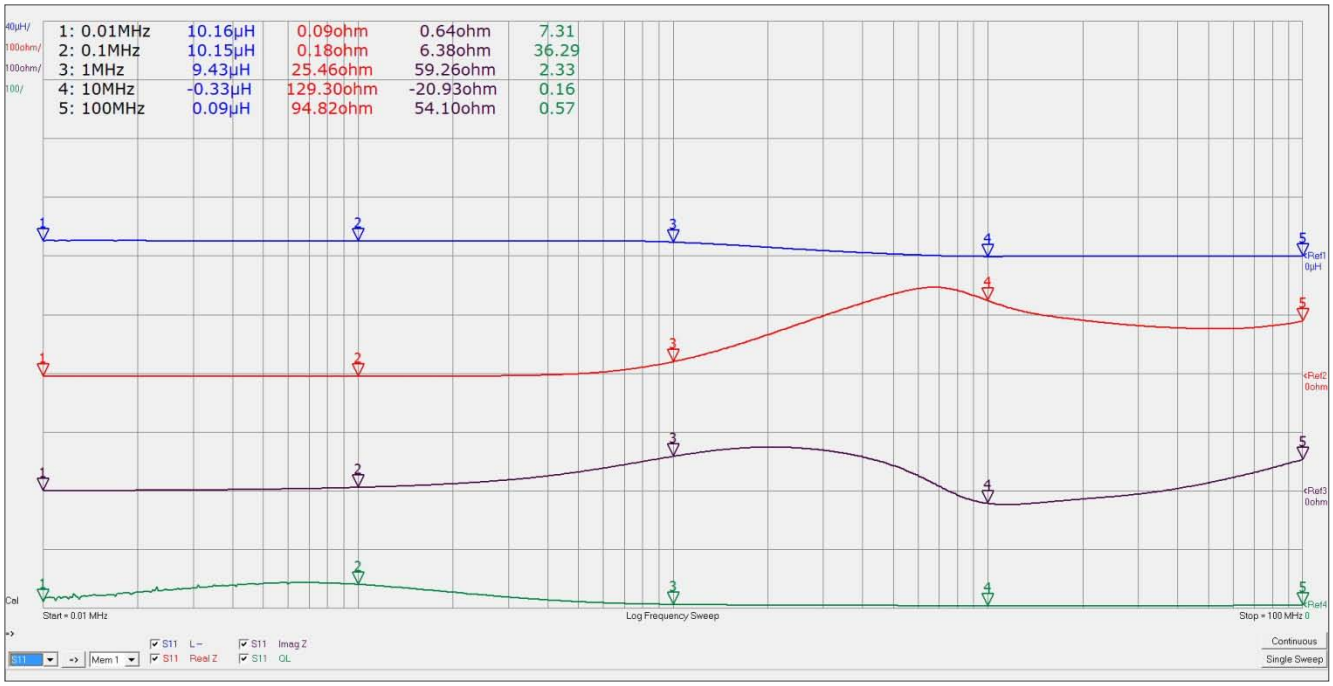

Abbildung 2 Messung des Frequenzgangs der Induktivität einer 10 µH-Ringkernspule.

4.5 Messung der Kabellänge

Ein verlustfreies *HF*-Kabel der Länge $\lambda/4$ (einer viertel Wellenlänge) oder einem ungeradzahligen Vielfachen davon ($3\lambda/4$, $5\lambda/4$, …), dessen Ende *offen* ist, verhält sich wie ein Serienresonanzkreis aus Spule und Kondensator. Das heißt, der Imaginärteil der Impedanz hat für Kabel dieser Längen den Wert Null. Bei einem realen Kabel bleibt wegen der Dämpfung ein kleiner ohmscher Widerstand, den wir vernachlässigen. Das heißt, der Imaginärteil Im(Z) der Impedanz eines Kabels beliebiger Länge L, gemessen als Funktion der Frequenz, hat eine Nullstelle, wenn die Frequenz die Bedingung

$$(7) \qquad L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

erfüllt. Der Nulldurchgang von Im(Z) bei der niedrigsten Frequenz entspricht damit der Länge $L = \lambda/4$. Gleichung (7) lässt sich an Hand von Kabeln gegebener Länge nachprüfen. Dazu formen wir um:

$$(8) \qquad L = \frac{\lambda}{4} + n\frac{\lambda}{2} = \frac{c}{f}\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{n}{2}\right),$$

wobei c die Phasengeschwindigkeit der Welle im Dielektrikum der Kabelisolation ist. Diese Geschwindigkeit ist um den »Verkürzungsfaktor« $k = 1/\sqrt{\varepsilon_r}$ (ε_r = Dielektrizitätskonstante der Isolation) kleiner als die Lichtgeschwindigkeit c_0 im Vakuum ($c_0 = 3\cdot10^8$ m/s). Also

(9) $$L = \frac{k\,c_0}{f}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{n}{2}\right).$$

Für Polyethylen ist $\varepsilon_r = 2{,}29$, damit $k = 0{,}66$.

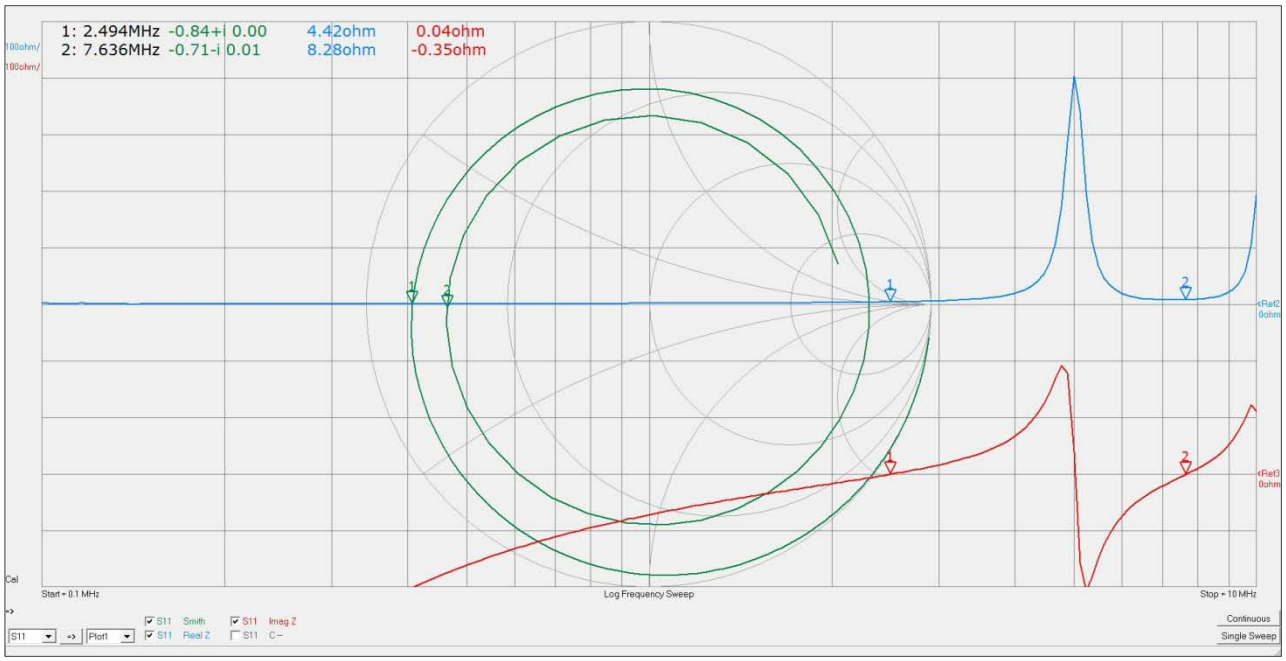

Abbildung 3 Impedanz Z eines leerlaufenden Kabels als Funktion der Frequenz f (RG174-Kabel, offenes Ende, Länge L = 20 m). Zwei Nullstellen des Imaginärteils von Z (Imag Z, rote Kurve) sind zu erkennen - bei f = 2,49 MHz und f = 7,64 MHz.

Abbildung 3 zeigt das Ergebnis einer eigenen Messung an einem 20 m langen *RG*174-Kabel. Es sind zwei Nulldurchgänge von Im(*Z*) zu erkennen: der erste bei der Frequenz $f = 2{,}49$ MHz, der zweite bei $f = 7{,}64$ MHz. Daraus errechnet man

(10) $$L = \frac{0{,}66\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{2{,}49\cdot 10^6\,/\,s}\cdot\frac{1}{4} = 19{,}88\ m \quad \text{bzw.} \quad L = \frac{0{,}66\cdot 3\cdot 10^8\,m/s}{7{,}64\cdot 10^6\,/\,s}\cdot\frac{3}{4} = 19{,}44\ m.$$

Beide Werte stimmen recht gut mit der geometrischen Länge 20 m überein.

Anmerkungen

[1] Michael Knitter: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (1)*, Funkamateur **67** (2018), S. 322 und: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (2)*, Funkamateur **67** (2018), S. 436

[2] Präsentation *Antennen Analysator Hamradio 2018*: https://www.dg5mk.de/pages/downloads.php

[3] Thomas Baier (*DG8SAQ*): *VNWA*-Software. www.sdr-kits.net

[4] Funkamateur-Leserservice: *Installation und Konfiguration der PC-Software VNWA zur Nutzung mit dem FA-VA5*, www.funkamateur.de → *BX245 – VNWA*-Software – 200424

5. Smith-Diagramm

5.1 Was wird im Smith-Diagramm dargestellt?

Das Smith-Diagramm ist die Darstellung des Reflexionsfaktors[1] Γ in der komplexen Zahlen-Ebene[2]. Das heißt, der Realteil Re(Γ) wird in *x*-Richtung, der Imaginärteil Im(Γ) in *y*-Richtung aufgetragen. Man wundert sich, dass diese Art der Darstellung zu einem Gebilde (dem Smith-Diagramm) führt, das an Stelle eines Gitters von kartesischen (rechtwinkligen) Koordinaten ein Netz von Kreisen oder Kreisbögen enthält – und dazu noch von einem Kreis begrenzt wird. Wie kommt es dazu?

5.2 Messanordnung: Generator, Kabel und Abschluss-Impedanz

Der Begriff »Reflexionsfaktor« deutet an, dass wir uns folgende Messanordnung für die nachfolgenden Überlegungen vorzustellen haben: Ein Hochfrequenzgenerator speist eine elektromagnetische Welle in ein Kabel ein, an dessen Ende die mit der Welle eintreffende Energie »verbraucht« wird (Abb. 1).

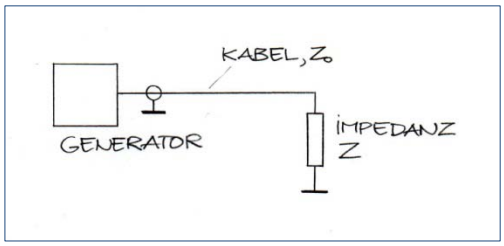

Abbildung 1 Messanordnung aus HF-Generator, Kabel der Impedanz Z_0 und Abschluss-Widerstand (»Verbraucher«, z.B. Antenne) mit der Impedanz Z

Das dazu angeschlossene »Gerät« kann beispielsweise eine Antenne sein. Sie benutzt die vom Generator gelieferte Energie zur Abstrahlung. Damit diese Energie vollständig zur Abstrahlung gelangt, darf die Welle am Fußpunkt der Antenne keine Reflexionen erfahren. In der Praxis lässt sich dieser Zustand nur annähernd realisieren, es gibt immer eine reflektierte Welle. Anteil und Phasenlage der reflektierten Welle werden im oben genannten Reflexionsfaktor Γ numerisch erfasst. Der Reflexionsfaktor hängt ab vom Wechselstromwiderstand (der Impedanz) der Antenne – im allgemeinen Fall von der Impedanz *Z*, mit der das Kabel am Ende abgeschlossen ist.

5.3 Reflexionsfaktor und normierte Impedanz

Ausgangspunkt unserer Überlegung ist die Gleichung, die den Reflexionsfaktor Γ mit der Impedanz *Z* verknüpft, mit der die Hochfrequenzleitung am Ende abgeschlossen ist:

$$(1) \qquad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \; .$$

Dabei ist Z_0 eine im Grunde beliebige, aber in der Regel zu $Z_0 = 50\ \Omega$ angenommene reellwertige Referenz-Impedanz (Der Wert 50 Ω ist die Impedanz von vielfach benutzten Koaxialkabeln). Da *Z* wie Γ eine komplexe Zahl ist, lässt sie sich auch in der komplexen Zahlebene darstellen. Man schreibt

$$(2) \qquad Z = R + jX \; ,$$

dabei ist *R* die Resistanz (der ohmsche Widerstand) und *X* die Reaktanz (der Blindwiderstand). Der Realteil *R* wird in *x*-Richtung, der Imaginärteil *X* in *y*-Richtung aufgetragen. Setzt man $Z = R + jX$ in Gleichung (1) ein, erhält man die zu einer beliebigen (und sinnvollen) komplexen Zahl *Z* gehörige komplexe Zahl Γ. Und zwar entspricht jedem *Z* nur ein einziger Wert von Γ. Umgekehrt gehört zu jedem Wert von Γ ein und nur ein Wert von *Z*. Der Übergang von *Z* nach Γ ist, wie man sagt, eine »umkehrbar eindeutige Abbildung«. Wir bewegen uns dabei von einer komplexen Zahlen-Ebene in

eine andere, ebenfalls komplexe Zahlen-Ebene. Wichtig ist, dass wir zwischen der Z-Ebene der Impedanzen und der Γ-Ebene des Reflexionsfaktors unterscheiden.

In der Praxis dividiert man die Impedanz Z durch die Referenz-Impedanz Z_0 (50 Ω) und bezeichnet den Quotienten mit dem Kleinbuchstaben z:

(3) $$z = \frac{Z}{Z_0} \quad .$$

Mit den so normierten Impedanz-Werten wird im Smith-Diagramm gerechnet. Gleichung (1) wird in der normierten Schreibweise zu

(4) $$\Gamma = \frac{z-1}{z+1} \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \; ,$$

und die Ebene der Impedanzen wird dem entsprechend in z-Ebene umbenannt.

Ein Zahlenbeispiel: Sei $Z = (50 + 50\,j)\,\Omega$, also $z = 1 + j$. Dann folgt

$$\Gamma = \frac{1+j-1}{1+j+1} = \frac{j}{j+2} = \frac{j}{j+2}\cdot\frac{j-2}{j-2} = \frac{-1-2j}{-1-4} = \frac{1+2j}{5} = 0{,}2 + 0{,}4\,j \; .$$

und

$$z = \frac{1+0{,}2+0{,}4\,j}{1-0{,}2-0{,}4\,j} = \frac{1{,}2+0{,}4\,j}{0{,}8-0{,}4\,j} = \frac{1{,}2+0{,}4\,j}{0{,}8-0{,}4\,j}\cdot\frac{0{,}8+0{,}4\,j}{0{,}8+0{,}4\,j} = \frac{0{,}8+0{,}8\,j}{0{,}8} = 1 + j \; .$$

Das heißt, die Zahl $z = 1 + j$ in der Ebene der Impedanzen (z-Ebene) wird abgebildet auf die Zahl $\Gamma = 0{,}2 + 0{,}4\,j$ in der Ebene des Reflexionsfaktors (Γ-Ebene). Aus $\Gamma = 0{,}2 + 0{,}4\,j$ in der Γ-Ebene folgt im Rückwärtsgang wieder $z = 1 + j$ in der z-Ebene.

Die Koordinaten des Bildpunktes, das heißt, die numerischen Werte des Real- und Imaginärteils von Γ, hängen natürlich von der gewählten Referenz-Impedanz Z_0 ab. Die Rücktransformation liefert dann aber wieder die Ausgangsimpedanz in der z-Ebene. Beispiel: Wählt man als Referenz-Impedanz den (nicht üblichen) Wert $Z_0 = 25\,\Omega$, erhält man aus $Z = (50 + 50\,j)\,\Omega$ die normierte Impedanz $z = 2 + 2\,j$ und damit $\Gamma = (7/13) + (4/13)\,j$. Die Rückumformung ergibt $z = (20 + 4\,j)/(6 - 4\,j) = 2 + 2\,j$.

5.4 Abbildung von Geraden der Z-Ebene mit R = const und X = const in die Γ-Ebene

Der Punkt $z = 1 + j$ in der z-Ebene wird, wie vorhin berechnet, abgebildet auf die Zahl $\Gamma = 0{,}2 + 0{,}4\,j$ in der Ebene des Reflexionsfaktors. Wir berechnen weitere Bildpunkte von Zahlen z mit demselben Realteil. Die Zahl $z = 1 + 0j$ ergibt $\Gamma = 0 + 0j$, also den Koordinatenursprung der Γ-Ebene, $z = 1 + 2j$ liefert

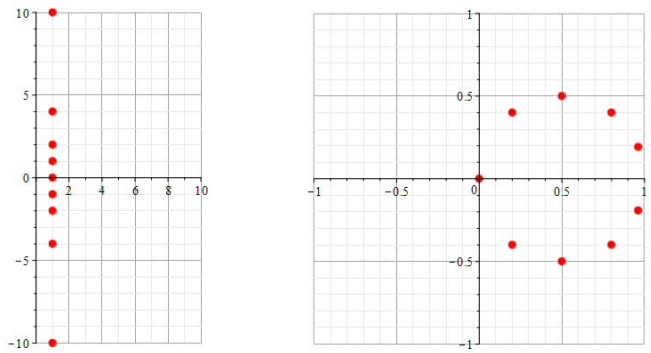

Abbildung 2 Punkte der z-Ebene (Diagramm links) mit Re(z) = 1 werden nach Gl.(4) in die Γ-Ebene (rechtes Diagramm) abgebildet und liegen dort auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse.

$\Gamma = 0{,}5 + 0{,}5\,j$, und $z = 1 + 4j$ wird auf $\Gamma = 0{,}8 + 0{,}4\,j$ abgebildet. Ein Computer besorgt uns weitere Bildpunkte Γ zu vorgegebenen Punkten in der z-Ebene mit Realteil Re(z) = 1. Abbildung (2) zeigt die beiden Ebenen mit einigen solcher Punkte.

Bei größerer Punktdichte ergäbe sich, dass die Gerade Re(z) = 1 auf einen Kreis in der Γ-Ebene abgebildet wird. Mit größerem Aufwand (und mehr Geduld) kann man zeigen: Alle Geraden mit konstantem Realteil Re(z) werden in Kreise der Γ-Ebene verwandelt, deren Mittelpunkt auf der reellen Achse liegt und die durch den Punkt (1, 0) der reellen Achse gehen. Die Bedingung Re(z) = konstant entspricht in nicht-normierter Formulierung R = konstant, also einem konstanten ohmschen Widerstand. In Abb. (3) sind die Geraden mit Re(z) = 0, 1/2, 1 und 2 der z-Ebene und die zugehörigen Kreise in der Γ-Ebene dargestellt.

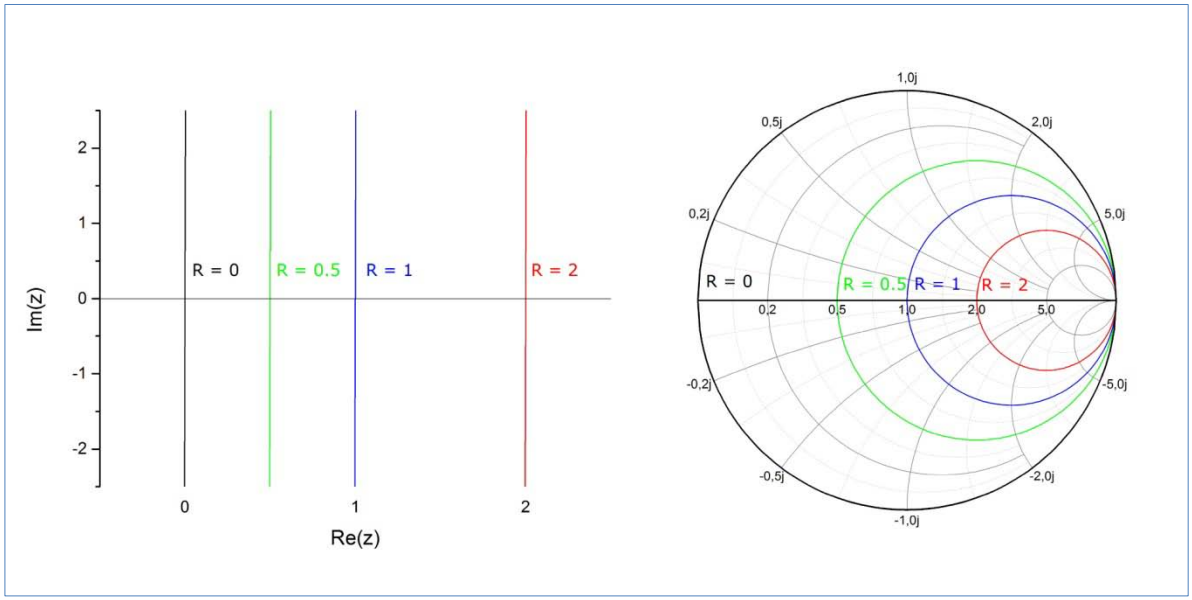

Abbildung 3 Geraden konstanten Realteils Re(z) in der z-Ebene und deren zugehörige Kreise in der Γ-Ebene. Die Zahlenwerte von Re(z) müssten, genau genommen, mit R/Z_0 bezeichnet werden. Diese Nachlässigkeit erlaube ich mir: in der Regel geht aus dem Kontext hervor, ob man mit normierten oder nicht normierten Größen rechnet.

Eine ähnliche Überlegung stellt man an für Geraden, die Impedanzen mit konstantem Imaginärteil Im(z) darstellen. Der Computer liefert zum Beispiel für die Gerade mit Im(z) = 1 die in Abb. (4) gezeigten Punkte.

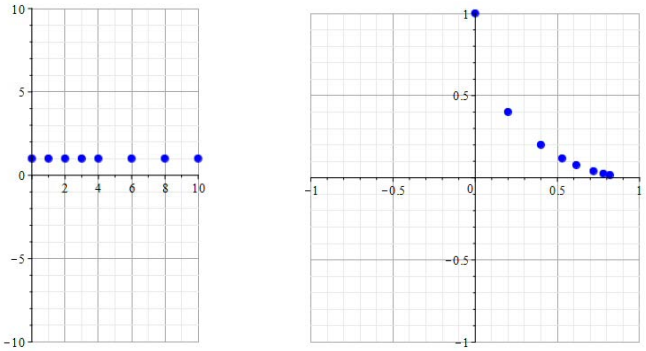

Abbildung 4 Punkte der z-Ebene (Diagramm links) mit Im(z) = 1 werden nach Gl.(4) in die Γ-Ebene (rechtes Diagramm) abgebildet. Sie liegen dort auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt auf der Senkrechten durch den Punkt (1,0).

Man kann auch hier zeigen: Alle Geraden konstanten Imaginärteils Im(z) in der z-Ebene werden in Kreise, genauer Kreisbögen, der Γ-Ebene abgebildet. Die Mittelpunkte dieser Kreisbögen liegen auf der

Senkrechten durch den Punkt (1, 0) der reellen Achse. In nicht-normierter Ausdrucksweise ist Im(z) = konstant gleichbedeutend mit konstanter Reaktanz, also jX = konstant.

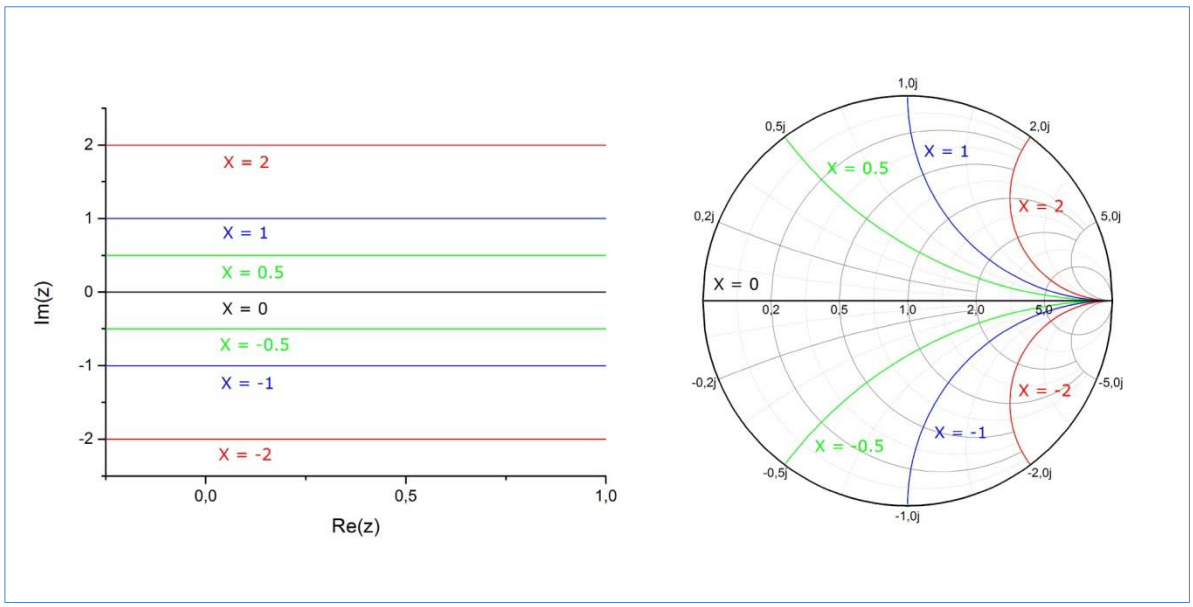

Abbildung 5 Geraden konstanten Imaginärteils Im(z) in der z-Ebene und deren zugehörige Kreise in der Γ-Ebene. Auch hier gilt: Die Zahlenwerte von Im(z) müssten, genau genommen, mit X/Z_0 bezeichnet werden.

Kombiniert man Abb. (3) und Abb. (5), die beiden Darstellungen der Γ-Ebene für konstanten Real- und Imaginärteil von z, erhält man den »Schnittmusterbogen« des Smith-Diagramms in Abb. (6).

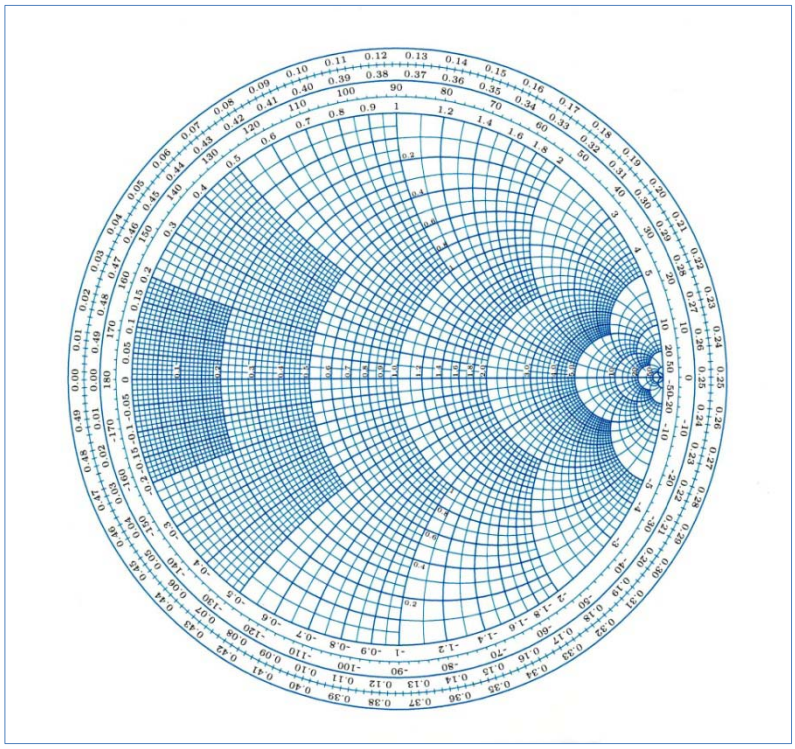

Abbildung 6 Geraden der z-Ebene (Abbildungen 3 und 5, jeweils linke Graphen) werden durch die Abbildungsvorschrift $\Gamma = (z - 1)/(z + 1)$ zu Kreisen in der Γ-Ebene (im Smith-Diagramm). Die Geraden der z-Ebene sind auf den Bereich $R \geq 0$ beschränkt (Abb. 3), da negative Werte von R unphysikalisch sind. Die Kreise in der Γ-Ebene, die den Geraden der z-Ebene mit $R \geq 0$ entsprechen, sind deshalb auf den Bereich $|\Gamma| \leq 1$ (auf das Innere des Einheitskreises und den Kreis selbst) beschränkt.

5.5 Ein Experiment zum Smith-Diagramm

Die Kreise und Kreisbögen des Smith-Diagramms sind die Linien konstanten Real- bzw. Imaginärteils der Impedanz $Z = R + jX$. Wir zeigen, dass die Messpunkte des Reflexionsfaktors im Smith-Diagramm tatsächlich auf diesen Kreisen bzw. Kreisbögen liegen, wenn R bzw. jX konstant ist. Unser Messobjekt ist die Serienschaltung eines Widerstands R und einer Spule (Induktivität) bzw. eines Kondensators (Kapazität). Die Impedanz setzt sich somit zusammen aus dem Realteil R und einem Imaginärteil $jX = j\omega L$ (induktiv) bzw. $jX = -j/\omega C$ (kapazitiv). L ist die Induktivität der Spule, C die Kapazität des Kondensators, $\omega = 2\pi f$ die Kreisfrequenz der anliegende Wechselspannung.

Zunächst untersuchen wir den Fall konstanten Widerstands R. Wir wählen $R = 50\ \Omega$ und variieren durch Hinzufügen verschiedener Spulen und Kondensatoren den Wert jX der Reaktanz. Die Frequenz der anliegenden Wechselspannung beträgt dabei konstant $f = 10$ MHz. Tabelle 1 zeigt das Ergebnis.

Tabelle 1 Messung der Impedanz Z einer Reihenschaltung von Widerstand R und Reaktanz jX bei fester Frequenz f = 10 MHz. Widerstand konstant R = 50 Ohm, Reaktanz jX variabel. z = normierte Impedanz = Z/Z_0 (Z_0 = 50 Ohm).

R/Ω	C/pF	L/µH	Re(Z)= R/Ω	jIm(Z)= jX/Ω	Re(z)= Z/Z_0	jIm(z)= jX/Z_0
50	47		45,4	-j314	0,908	-j6,28
50	100		47,8	-j154	0,956	-j3,08
50	330		52,6	-j51,6	1,052	-j1,03
50	1000		51,3	-j16,2	1,026	-j0,32
50	1680		50,6	-j6,6	1,012	-j0,13
50		0,22	50,1	j13,8	1,002	j0,28
50		1,00	51,6	j63,9	1,032	j1,28
50		2,14	53,6	j139	1,072	j2,78
50		11,50	69,8	j838	1,396	j16,76

Im Smith-Diagramm Abb. 7 sind die normierten Messpunkte eingetragen (Spalten 6 und 7 der Tabelle 1). Sie liegen recht gut auf dem Kreis für $R = 50\ \Omega$.

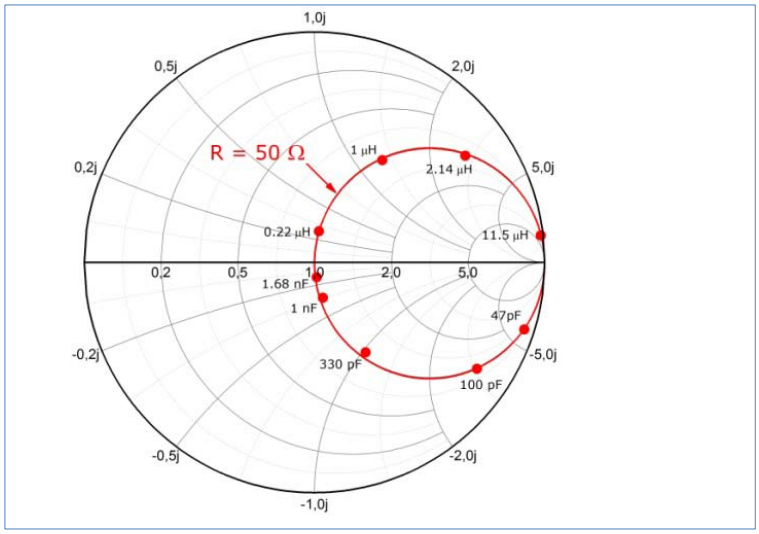

Abb. 7 Messpunkte der Tabelle 1: Impedanz Z = R + jX eines Serienkreises mit konstantem Widerstand R = 50 Ohm und variabler Reaktanz jX. Frequenz f = 10 MHz. Die Punkte liegen recht gut auf dem von der Theorie berechneten Kreis.

In einer weiteren Messreihe wählen wir, wie vorhin, eine feste Frequenz $f = 10$ MHz und zwei konstante

Werte von jX, eine induktive Reaktanz $jX = +j49{,}5\ \Omega$ (L = 787 nH) und eine kapazitive Reaktanz $jX = -j49{,}2\ \Omega$ (C = 324 pF), und variieren den Wert des Widerstands R. Die gemessenen Impedanzen sind in Tabelle 2 gelistet.

Tabelle 2 Messung der Impedanz Z einer Reihenschaltung von Widerstand R und Reaktanz jX bei fester Frequenz f = 10 MHz. Reaktanz jX konstant, (1) jX = +j49,5 Ohm (induktiv), (2) jX = -j49,2 Ohm (kapazitiv), Widerstand R variabel. z = normierte Impedanz = Z/Z_0 (Z_0 = 50 Ohm).

L/nH	C/pF	R/Ω	Re(Z)= R/Ω	jIm(Z)= jX/Ω	Re(z)= Z/Z_0	jIm(z)= jX/Z_0
787		10	11,1	j50,6	0,222	j1,012
787		20	21,1	j49,9	0,422	j0,998
787		28	29,1	j50,6	0,582	j1,012
787		50	51,0	j47,8	1,02	j0,956
787		68	68,5	j50,6	1,37	j1,012
787		100	100	j48,9	2,00	j0,978
787		200	200	j47,9	4,00	j0,958
787		1000	994	j15,9	19,88	j0,380
	324	10	9,7	-j48,9	0,194	-j0,962
	324	20	19,8	-j48,2	0,396	-j0,964
	324	28	27,6	-j48,0	0,552	-j0,960
	324	50	49,6	-j49,6	0,992	-j0,992
	324	68	67,2	-j49,2	1,344	-j0,984
	324	100	98,5	-j50,1	1,970	-j1,002
	324	200	198	-j51,3	3,960	-j1,026
	324	1000	994	-j82,2	19,88	-j1,644

Abb. 8 zeigt die Messpunkte im Smith-Diagramm. Sie liegen wiederum recht gut auf den von der Theorie berechneten Kreisbögen konstanter Reaktanz jX.

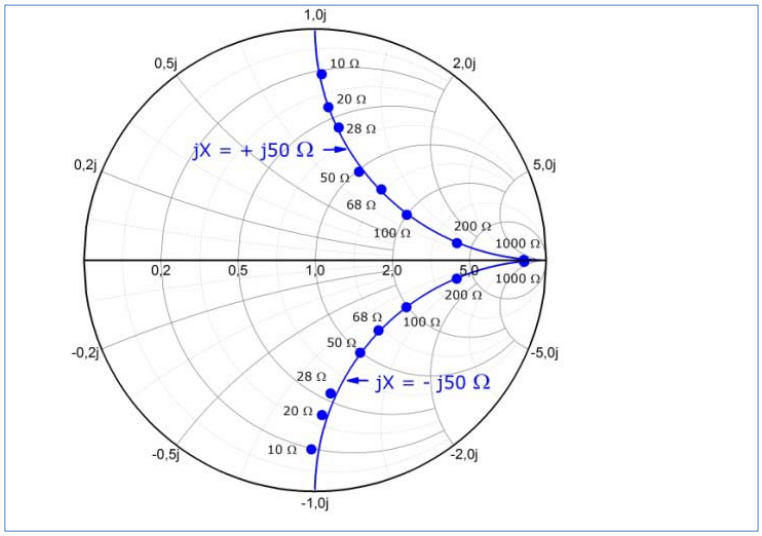

Abb. 8 Messpunkte der Tabelle 2: Impedanz Z = R + jX eines Serienkreises mit konstanter Reaktanz, (1) jX = + j49,5 Ohm, (2) jX = - j49,2 Ohm. R variiert zwischen 50 Ohm und 1000 Ohm. Frequenz f = 10 MHz. Die Punkte liegen recht gut auf den von der Theorie berechneten Kreisen.

5.6 Wieso wird das Smith-Diagramm durch einen Kreis begrenzt?

Komplexe Ebenen werden in der Regel mit kartesischen, also rechtwinkligen Koordinaten überzogen. Im Normalfall sind solche Koordinatensysteme, wie unsere Abbildungen (2) und (4), durch Rechtecke oder Quadrate begrenzt. Das Smith-Diagramm macht da eine Ausnahme, es wird durch einen Kreis

begrenzt (Abb. 6). Warum? – Ein Blick auf Abb. (3) zeigt, dass die Außengrenze des Smith-Diagramms offenbar der Kreis für $R = 0$ ist. Das ist richtig, denn $R = 0$ ist der kleinstmögliche Wert der Resistanz, den die Abschluss-Impedanz Z annehmen kann. Ein negativer ohmscher Widerstand würde einen Verstärker am Ende der Leitung darstellen. Die Abbildung zeigt auch, dass dies der Einheitskreis mit Mittelpunkt (0, 0) ist. Auch richtig: Nach Gl. (4) ist der Reflexionsfaktor für $Z = 0 + jX$

$$\Gamma = \frac{\frac{jX}{Z_0} - 1}{\frac{jX}{Z_0} + 1} = \frac{\frac{jX}{Z_0} - 1}{\frac{jX}{Z_0} + 1} \cdot \frac{\frac{jX}{Z_0} - 1}{\frac{jX}{Z_0} - 1} = \frac{-\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 - 2j\frac{X}{Z_0} + 1}{-\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 - 1} = \frac{\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 - 1}{\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1} + j\frac{2\frac{X}{Z_0}}{\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1}.$$

Mit

$$\Gamma_X = \mathrm{Re}(\Gamma) = \left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 - 1\right] \cdot \left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^{-1} \quad \text{und} \quad \Gamma_Y = \mathrm{Im}(\Gamma) = 2\frac{X}{Z_0} \cdot \left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^{-1}$$

folgt

$$\Gamma_X^2 + \Gamma_Y^2 = \frac{\left(\frac{X}{Z_0}\right)^4 - 2\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1}{\left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^2} + \frac{4\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2}{\left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{\left(\frac{X}{Z_0}\right)^4 + 2\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1}{\left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^2} = \frac{\left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^2}{\left[\left(\frac{X}{Z_0}\right)^2 + 1\right]^2} = 1\,,$$

also in der Tat der Einheitskreis um den Ursprung (0, 0).

5.7 Abbildung von Geraden der Y-Ebene (Admittanz-Ebene) in die Γ-Ebene

Die Abbildung, die das Smith-Diagramm erzeugt, lässt sich auch dazu verwenden, Admittanzen $Y = 1/Z$ in der Γ-Ebene darzustellen: Nach Gl. (4) gilt für die normierte Admittanz $y = 1/z = Z_0/Z$

(5) $$\Gamma(y) = \frac{y-1}{y+1} = \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1}{z} + 1} = -\frac{z-1}{z+1} = -\Gamma(z)\,,$$

das heißt

(6) $$\Gamma(y) = -\Gamma(z)\,.$$

Da $\Gamma(z)$ eine komplexe Zahl ist, entspricht das Minuszeichen vor $\Gamma(z)$ wegen $-1 = e^{j\pi}$ einer Drehung des (komplexen) Zahlpfeils um 180°:

(7) $$\Gamma(y) = e^{j\pi}\,\Gamma(z)\,.$$

Dreht man daher den Pfeil vom Ursprung des Smith-Diagramms zum Impedanzpunkt $\Gamma(R, jX)$ um 180°, zeigt die Spitze des gedrehten Pfeils zum Admittanzpunkt $\Gamma(G, jB)$. Konduktanz G und Suszeptanz B des Admittanzpunktes folgen aus Gl. (5), indem man links mit Y_0 und rechts mit Z_0 erweitert:

(8) $$\frac{G + jB - Y_0}{G + jB + Y_0} = -\frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0}\,.$$

Das wird umgeformt zu

$$(G + jB - Y_0)(R + jX + Z_0) = -(R + jX - Z_0)(G + jB + Y_0)$$

und weiter zu

$$GR + jGX + GZ_0 + jBR - BX + jBZ_0 - Y_0R - jY_0X_0 - Y_0Z_0 \;=$$
$$-\,RG - jRB - RY_0 - jXG + XB - jXY_0 + Z_0G + jZ_0B + Z_0Y_0 \quad .$$

Fasst man zusammen und beachtet $Y_0Z_0 = 1$, folgt

$$2GR - 2BX - 2 + 2\,j(GX + BR) \;=\; 0 \quad .$$

Die linke Seite ist gleich Null, wenn beide, Real- und Imaginärteil, verschwinden:

$$\begin{aligned} RG - XB - 1 &= 0 \\ GX + BR &= 0 \end{aligned} \quad .$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $G = -\,BR/X$, das wird in die erste Gleichung eingesetzt und ergibt die Koordinaten des Punktes $\Gamma(G, jB)$:

(9) $$B \;=\; -\frac{X}{R^2 + X^2} \quad \text{und} \quad G \;=\; \frac{R}{R^2 + X^2} \quad .$$

Die Linien gleicher Konduktanz G und gleicher Suszeptanz B stellen im Smith-Diagramm ein Netz dar, das dem Netz der Linien gleichen Widerstands R und gleicher Reaktanz X gleichwertig ist. Ich nenne das Netz der Linien konstanter Konduktanz G und konstanter Suszeptanz B das »Admittanznetz«, das Netz der Linien konstanten Widerstands R und konstanter Reaktanz X das »Impedanznetz«. Das Admittanznetz ist gegenüber dem Impedanznetz (R bzw. X konstant) im Ursprung des Smith-Diagramms gespiegelt. Oft werden beide Netze zu einem einzigen »Schnittmusterbogen« kombiniert. Abbildung (9) zeigt das Ergebnis. In ihr sind die Linien des Impedanznetzes rot, die des Admittanznetzes blau gezeichnet. Sich in dem so erzeugten Wirrwarr von Linien zurechtzufinden erfordert einige Übung.

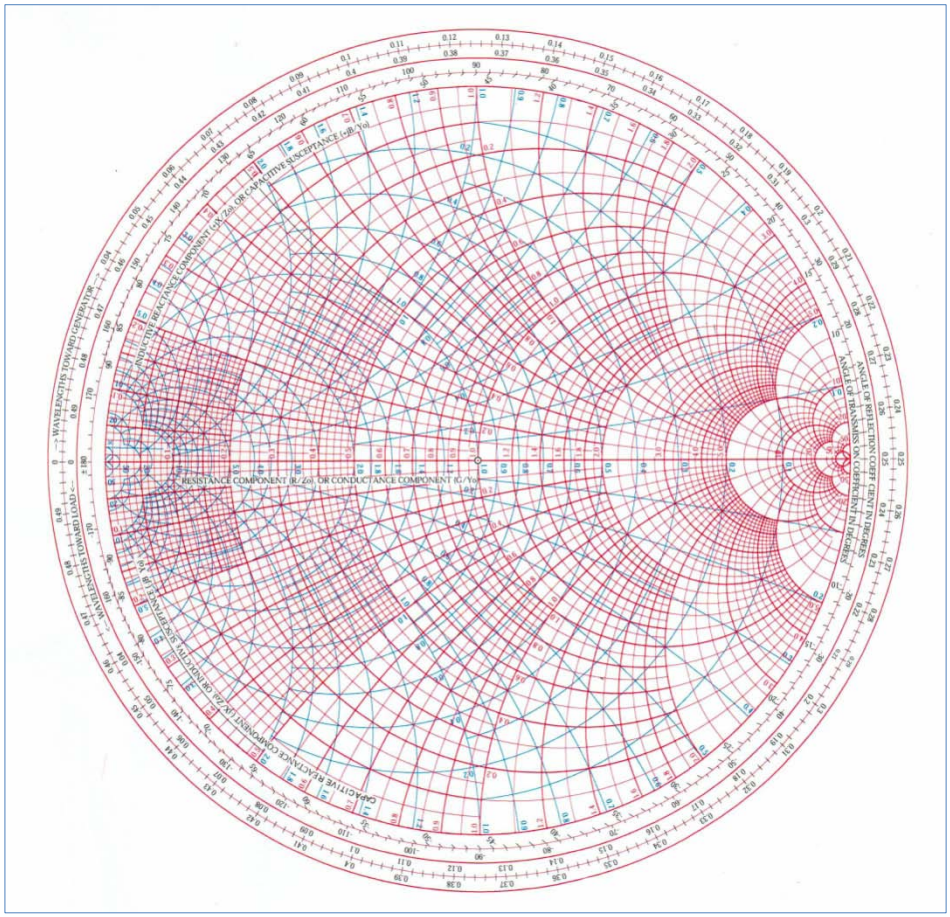

Abbildung 9 Linien-Netz konstanten Widerstands R und konstanter Reaktanz X (»Impedanznetz«, rot) und Linien-Netz konstanter Konduktanz G und konstanter Suszeptanz B (»Admittanznetz«, blau) im Smith-Diagramm.

5.8 Schlussbemerkung

Die Linien-Netze (Impedanz- und Admittanznetz) der Abb. (9) sind vor allem für die Praxis von Bedeutung. Das Impedanznetz erlaubt es, zu jedem Wertepaar (R, jX) der Impedanz Z (normiert auf Z_0) den entsprechenden Punkt in der Γ-Ebene des Reflexionsfaktors (das heißt, im Smith-Diagramm) einzutragen. Das Admittanznetz gestattet es, dasselbe für jedes Wertepaar (G, jB) der Admittanz Y (normiert auf $Y_0 = 1/Z_0$) zu tun. In beiden Fällen ist keine Rechnung nötig – das heißt, Real- und Imaginärteil von Γ müssen nicht explizit bestimmt werden. Geht man von vorgegebenen Punkten der Γ-Ebene (des Smith-Diagramms) aus, lässt sich auch die Wirkung von Veränderungen der Parameter (R, jX, G oder jB) verfolgen, und zwar wiederum ohne große Rechnung. Auf diese Weise lassen sich eine Reihe von Problemen der Hochfrequenztechnik *grafisch* lösen.

Eine ausführliche und tiefer gehende Darstellung von Theorie und Praxis des Smith-Diagramms findet sich in dem Artikel *RF Engineering Basic Concepts – The Smith Chart*, *CERN*, Geneva, von F. Caspers[3]. Zum Schluss eine mathematische Bemerkung: Der Übergang von der Impedanz- oder Admittanz-Ebene (Z- bzw. Y-Ebene) zum Smith-Diagramm (Γ-Ebene) wurde bereits als »Abbildung« bezeichnet. Fasst man die Geraden der Impedanz- bzw. Admittanz-Ebene als Kreise mit dem Radius ∞ auf, handelt es sich um eine Transformation, die umkehrbar eindeutig Kreise in Kreise überführt (»konforme Abbildung« in der Mathematik).

Anmerkungen

[1] Der Reflexionsfaktor wird auch mit r bezeichnet. Der griechische Buchstabe Γ hebt sich m. E. besser gegenüber lateinischen Buchstaben ab. In der S-Matrix ist Γ das Matrixelement S_{11}.

[2] Die Lage einer Zahl z in der komplexen Zahl-Ebene stellt man in der Regel durch *kartesische* Koordinaten dar: Schreibt man $z = x + jy$, so ist x der Realteil und wird nach rechts (in x-Richtung), y der Imaginärteil und wird nach oben (in y-Richtung) aufgetragen.

[3] F. Caspers: *RF Engineering Basic Concepts – The Smith Chart*, *CERN*, Geneva

6. Navigation im Smith-Diagramm

6.1 Impedanz und Reflexionsfaktor im Smith-Diagramm

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt: Die Kreise (oder deren Teilstücke) des Smith-Diagramms sind die Linien konstanten Real- bzw. Imaginärteils der Impedanz. Man vergisst darüber vielleicht, dass die Impedanz selbst nicht die Größe ist, die man in das Diagramm einträgt. Deshalb zur Klarstellung: Was dort als Punkt oder Kurve wiedergegeben wird, sind Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl »Reflexionsfaktor«. Und zwar werden diese in einem zwar unsichtbaren, aber ansonsten normalen rechtwinkligen Koordinatensystem dargestellt. In Abb. (1) habe ich dieses Koordinatensystem einmal sichtbar gemacht und dem Smith-Diagramm überlagert.

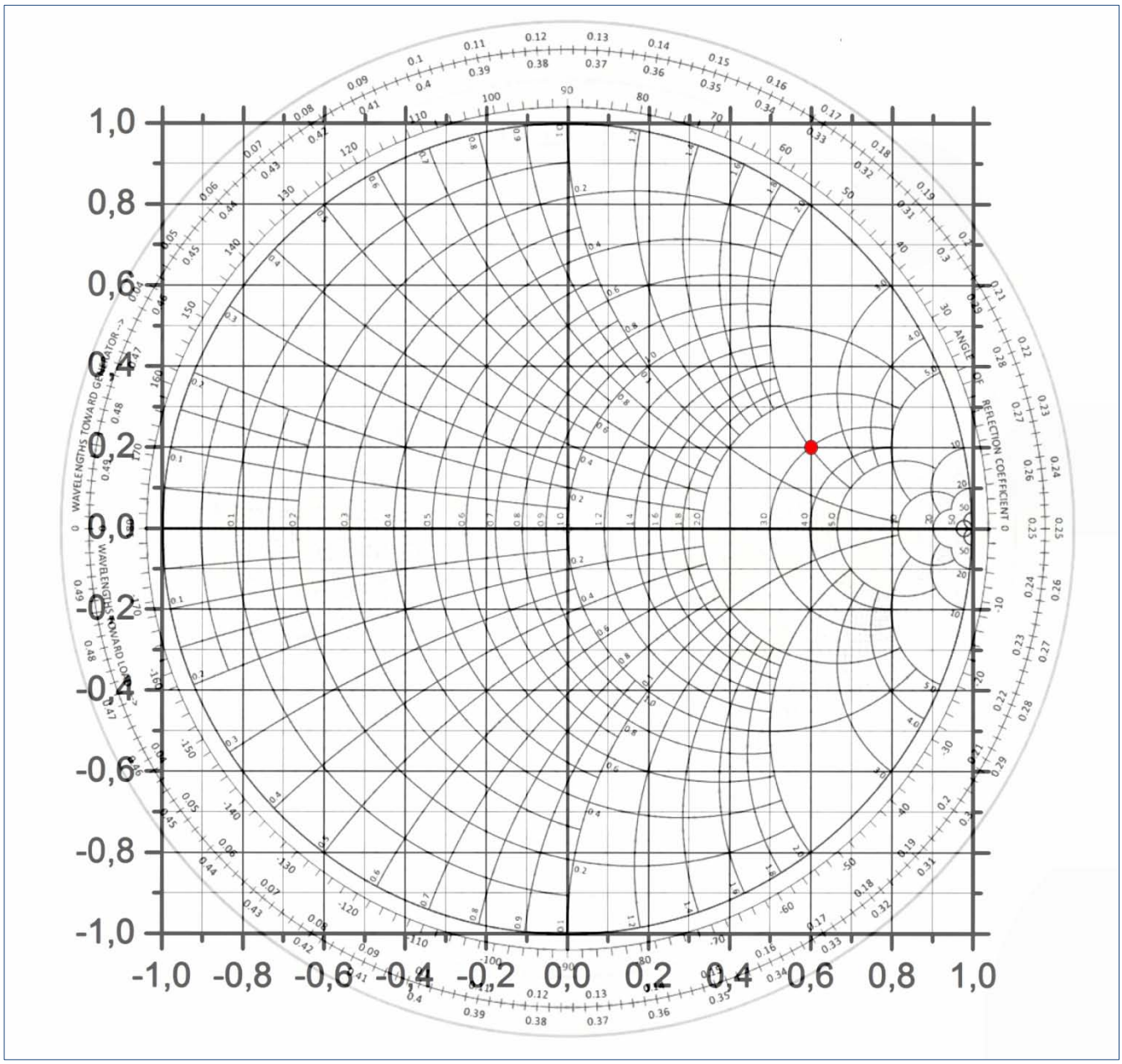

Abbildung 1 Smith-Diagramm mit überlagertem kartesischen Koordinatensystem. Im kartesischen System sind Real- und Imaginärteil des Reflexionsfaktors Γ ablesbar. Beispiel: Der (rote) Punkt $\Gamma = 0.6 + 0.2j$. Er ist das Abbild der (normierten) Impedanz $z = 3 + 2j$ und liegt deshalb im Smith-Diagramm auf dem Schnittpunkt der Kreise $\mathrm{Re}(z) = 3$ und $\mathrm{Im}(z) = 2$. In der Praxis sind die Werte von $\mathrm{Re}(\Gamma)$ und $\mathrm{Im}(\Gamma)$ nur Rechengrößen. Deshalb wird das kartesische Koordinatensystem nie gezeigt. Der Betrag von Γ geht in das VSWR (Stehwellenverhältnis) ein.

Wie üblich ist in x-Richtung der Realteil Re(Γ), in y-Richtung der Imaginärteil Im(Γ) des Reflexionsfaktors aufzutragen. Der Punkt (Re(Γ)|Im(Γ)) stellt also die komplexe Zahl Γ dar. Der Betrag des Reflexionsfaktors ist der Abstand dieses Punktes vom Ursprung.

Anhand von Abb. (1) lässt sich die dem Smith-Diagramm zugrunde liegende Verknüpfung von Impedanz Z und Reflexionsfaktor Γ nochmals erklären. Dazu folgendes Beispiel: Eine Leitung ist an ihrem Ende mit der Impedanz $Z = (150 + 100j)\ \Omega$ abgeschlossen. Gesucht ist der Reflexionsfaktor Γ. Für $Z_0 = 50\ \Omega$ erhält man als normierte Impedanz $z = 3+2j$. Sie ergibt

$$(1) \qquad \Gamma = \frac{z-1}{z+1} = \frac{3+2j-1}{3+2j+1} = \frac{2+2j}{4+2j} = \frac{2+2j}{4+2j}\cdot\frac{4-2j}{4-2j} = \frac{1+24j}{20} = 0{,}6 + 0{,}2j \ .$$

Wollte man, ohne das Smith-Diagramm zu bemühen, dieses Γ in der komplexen Zahlebene als Punkt markieren, müsste man vom Ursprung aus 0,6 Einheiten in x- und 0,2 Einheiten in y-Richtung abzählen – und dabei auf das kartesische Koordinatensystem in der Abbildung zurückgreifen. An dieser Stelle kommt das Smith-Diagramm ins Spiel: Es zeigt, dass der zu markierende Punkt genau dort liegt, wo sich die Kreislinien für Re(z) = 3 und Im(z) = 2 schneiden. Mit anderen Worten: Das Smith-Diagramm erspart einem die Rechnung in Gl. (1) und das »Abzählen« der Koordinatenwerte. Zugegeben, man hat auf diese Weise zwar die Lage von Γ in der komplexen Ebene erhalten, nicht aber die Zahlen 0,6 und 0,2. Im Folgenden zeigt sich, dass die Lage des Reflexionsfaktor-Punktes im Smith-Diagramm ausreicht, um andere Größen wie beispielsweise das Stehwellenverhältnis *VSWR* zu bestimmen – wiederum ohne großen Rechenaufwand.

6.2 Punkte z=0, z=∞ und z=1

Der vorherige Abschnitt war ein kurzer Rückblick auf die Verknüpfung von Impedanz Z und Reflexionsfaktor Γ. Jetzt zur Navigation im Smith-Diagramm: Man orientiert sich zunächst an drei charakteristischen Punkten, den Bildpunkten Γ der Grenzfälle $z = 0$ (»Kurzschluss«), $z = \infty$ (»offenes Ende«) und $z = 1$, also $Z = Z_0 = 50\ \Omega$ (»Anpassung«). Mit »Kurzschluss«, »offenes Ende« und »Anpassung« ist jeweils die Situation am Ende der Leitung gemeint. Aus $\Gamma = (z - 1)/(z + 1)$ folgt:

(a) Der Kurzschluss $z = 0$ führt zu $\Gamma = -1$.
(b) Das offene Ende $z = \infty$ ergibt $\Gamma = +1$.
(c) Der Abschluss mit $z = 1$ ($Z = Z_0 = 50\ \Omega$) liefert $\Gamma = 0$. Der Wert $\Gamma = 0$ entspricht dem Ursprung der Γ-Ebene. Er bedeutet, dass keine Reflexion der Welle stattfindet, also Anpassung vorliegt.

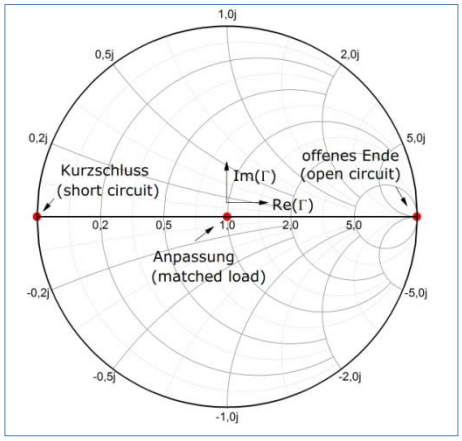

Abbildung 2 Charakteristische Punkte z = 0 (»Kurzschluss«, short circuit), z = ∞ (»offenes Ende«, open circuit) und z = 1 (»Anpassung«, matched load) im Smith-Diagramm.

Abbildung (2) zeigt diese Punkte (short cicuit = »Kurzschluss«, matched load = »Anpassung«, open circuit = »offenes Ende«). Sie liegen alle auf der reellen Achse.

6.3 Kapazitiver und induktiver Bereich

Die reelle Achse im Smith-Diagramm beherbergt die wichtigen Punkte $z = 0$ (»Kurzschluss«), $z = \infty$ (»offenes Ende«) und $z = 1$ (»Anpassung«), ist aber auch eine Trennlinie – und zwar die Grenze zwischen dem kapazitiven und dem induktiven Bereich der Impedanz. Ob eine Impedanz $Z = R + jX$ kapazitiv oder induktiv ist, hängt vom Vorzeichen des Imaginärteils X ab: Unterhalb der reellen Achse liegen die Punkte mit negativem Imaginärteil ($X < 0$), dies ist also der kapazitive Bereich des Smith-Diagramms. Oberhalb befinden sich die Punkte mit positivem Imaginärteil ($X > 0$), diese Hälfte des Smith-Diagramms ist somit der induktive Bereich.

6.4 Kreise $|\Gamma|$=konstant

Wie bei der Erläuterung zum kartesischen Koordinatensystem in Abb. (1) erwähnt, ist der Betrag des Reflexionsfaktors der Abstand des Punktes (Re(Γ)|Im(Γ)) vom Ursprung. Punkte gleichen Betrags von Γ liegen daher im Smith-Diagramm auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt des Ursprungs. In Abb. (3) ist als Beispiel der Kreis für $|\Gamma| = 0{,}5$ dargestellt.

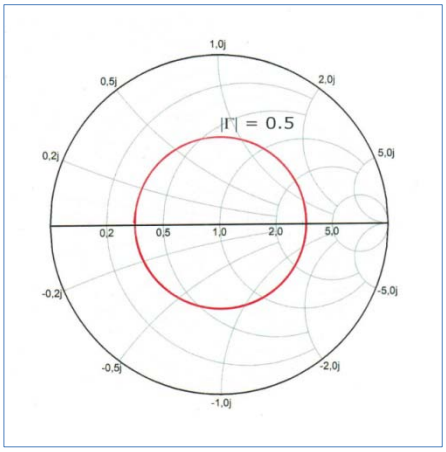

Abbildung 3 Kreis (rot) mit konstantem Betrag des Reflexionsfaktors, hier $|\Gamma| = 0{,}5$.

Der Betrag des Reflexionsfaktors ist bekanntlich mit dem Stehwellenverhältnis *VSWR* und dem Bruchteil der reflektierten Leistung verknüpft. Der Kreis $|\Gamma| = 0{,}5$ entspricht einem Stehwellenverhältnis $VSWR = (1 + |\Gamma|)/(1 - |\Gamma|) = 3$. In diesem Fall werden $|\Gamma|^2 = 0{,}5^2 = 0{,}25 = 25\%$ der vorlaufenden Leistung reflektiert. Dezibelfreaks rechnen lieber mit der Rückflussdämpfung (return loss), die beträgt $RL = -10 \cdot \log(0{,}25)$ dB = 6 dB ($10^{-0{,}6} \approx 0{,}25$).

Zur Erinnerung einige Formeln zum Verständnis der Zahlenwerte in Tabelle 1 (P = Leistung):

Betrag des Reflexionskoeffizienten	$\lvert\Gamma\rvert$	
Stehwellenverhältnis	**VSWR**	**VSWR = (1 + |Γ|)/(1 – |Γ|)**
Bruchteil der reflektierten Leistung	$\lvert\Gamma\rvert^2$	$\lvert\Gamma\rvert^2 = P_{reflektiert}/P_{vorlaufend}$
Rückflussdämpfung (Return Loss)	**RL**	**RL = -10·log(|Γ|²) [dB]**

Tabelle 1 listet für einige Beträge $|\Gamma|$ des Reflexionsfaktors die zugehörenden Zahlenwerte des Stehwellenverhältnisses, des Bruchteils der reflektierten Leistung und der Rückflussdämpfung auf.

Beachte: $|\Gamma|^2 = 10^{-RL/10}$, große Werte der Rückflussdämpfung *RL* bedeuten einen geringen Anteil an reflektierter Leistung – anders ausgedrückt, geringe Verluste durch Reflexion.

Tabelle 1 Stehwellenverhältnis VSWR, Bruchteil der reflektierten Leistung $|\Gamma|^2$ und Rückflussdämpfung (return loss) RL. Werte für einige Beträge des Reflexionskoeffizienten (Beachte: große Werte von RL bedeuten geringe Verluste).

$\|\Gamma\|$	VSWR	$\|\Gamma\|^2$	RL/dB	Bemerkungen
0	1	0	∞	Anpassung, keine Reflexion, RL unendlich
0,25	1,67	0,0625	12	große Werte von RL bedeuten geringe Verluste
0,5	3	0,25	6	25 Prozent der Leistung reflektiert, RL = 6dB
0,75	7	0,5625	2,5	ca. 60 Prozent der Leistung reflektiert
1	∞	1	0	vollständige Reflexion, RL = -10·log(1)= 0dB

6.5 Messung: Induktivität/Kapazität in Serie zu einem Widerstand

Die Kreise (oder deren Teilstücke innerhalb des Einheitskreises) des »normalen« Smith-Diagramms sind die Linien konstanten Real- bzw. Imaginärteils der Impedanz *Z*. Die »erweiterte« Version enthält zusätzlich die Linien konstanten Real- und Imaginärteils der Admittanz *Y* (= 1/*Z*). Wir wollen uns die Bedeutung dieser Linien mit Hilfe zweier Experimente vor Augen führen, beschränken uns dabei aber auf die Kreise der jeweils konstanten Realteile, also auf die Kreise konstanten Widerstands *R* (Realteil von *Z*) bzw. konstanten Leitwerts *G* (Realteil von *Y*). Im ersten Experiment untersuchen wir eine in *Reihe* zu einem ohmschen Widerstand geschaltete Induktivität oder Kapazität, im zweiten die *Parallel*schaltung der beiden Elemente. Im ersten Experiment geht es um das »normale« Smith-Diagramm, im zweiten Experiment um die »erweiterte« Version.

Tabelle 2 Messung der Impedanz Z einer Reihenschaltung von Widerstand R und Reaktanz X. Frequenz f = 10 MHz. Zwei Messreihen mit jeweils konstantem R (50 Ohm bzw. 10 Ohm) und variabler Reaktanz X.

R/Ω	C/pF	L/µH	Re(Z)/Ω	Im(Z)j/Ω	Re(z)	Im(z)j
50	47		45,4	-314j	0,908	-6,28j
50	100		47,8	-154j	0,956	-3,08j
50	330		52,6	-51,6j	1,052	-1,03j
50	1000		51,3	-16,2j	1,026	-0,32j
50	1680		50,6	-6,6j	1,012	-0,13j
50		0,22	50,1	13,8j	1,002	0,28j
50		1,00	51,6	63,9j	1,032	1,28j
50		2,14	53,6	139j	1,072	2,78j
50		11,50	69,8	838j	1,396	16,76j
10	47		14,5	-312j	0,290	-6,24j
10	100		10,7	-149j	0,214	-2,98j
10	330		13,8	-51,4j	0,276	-1,028j
10	1000		12,7	-14,7j	0,254	-0,294j
10	1680		10,8	-5,8j	0,216	-0,116j
10		0,22	11,7	14,5j	0,234	0,290j
10		1,00	11,3	64,7j	0,226	1,294j
10		2,14	12,1	139j	0,242	2,780j
10		11,50	13,8	829j	0,276	16,58j

Wir beginnen mit dem Fall *R* = konstant, also dem »normalen« Smith-Diagramm. Gemessen wird die Impedanz $Z = R + jX$ bei konstantem Realteil *R* für eine Reihe von Werten der Reaktanz *jX*. Wir

variieren jX, indem wir bei *konstanter* Frequenz f verschiedene Induktivitäten oder Kapazitäten (L bzw. C) zum Widerstand R *in Serie* hinzuschalten. Die gemessenen Werte Z tragen wir, normiert auf $Z_0 = 50\ \Omega$, in des Smith-Diagramm ein. Die Frage ist: liegen die Punkte $z = Z/Z_0$ tatsächlich auf einem der Kreise konstanten ohmschen Widerstands (konstanter Resistanz)?

Wir entscheiden uns für zwei Messreihen, eine erste Reihe mit $R = 50\ \Omega$, die zweite mit $R = 10\ \Omega$. Die Frequenz ist $f = 10$ MHz (»Einzelfrequenzmessung« im Menu des *FA-VA5*). Kapazitive Reaktanzen realisieren wir durch Kondensatoren mit $C =$ 47 pF, 100 pF, 330 pF, 1000 pF und 1680 pF (Reaktanz $jX = -j/\omega C$, $\omega = 2\pi f$), induktive Reaktanzen durch *HF*-Drosseln bzw. Zylinderspulen mit $L = 0{,}22\ \mu$H, 1 µH, 2,14 µH und 11,5 µH (Reaktanz $jX = j\omega L$). Tabelle 2 listet die Ergebnisse auf.

Wie im vorherigen Kapitel gezeigt, sind die Linien R = konstant Kreise mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse, die alle durch den Punkt »offenes Ende« (open circuit) gehen. Unsere Messungen mit dem *FA-VA5* bestätigen das. Abbildung (4) zeigt, dass die Punkte den theoretischen Kreisen (rot: $R = 50\ \Omega$, blau: $R = 10\ \Omega$) recht gut folgen.

Die den Messpunkten zugeordneten Werte von C bzw. L in der Abbildung zeigen: Punkte kapazitiver Impedanz befinden sich, wie erwartet, in der unteren Hälfte des Smith-Diagramms, Punkte induktiver Impedanz in der oberen Hälfte. Außerdem stellt man fest: Bewegt man sich, vom offenem Ende (open circuit) ausgehend, im Uhrzeigersinn auf einem Kreis konstanter Resistanz, werden zunächst (in der unteren Hälfte des Diagramms) die Werte von C, danach (in der oberen Hälfte) die Werte von L größer. Als Hilfe zur Orientierung im Smith-Diagramm eignen sich die zugehörigen Reaktanzwerte X. Sie beginnen am offenen Ende (open circuit) mit minus Unendlich ($X = -j/\omega C \rightarrow -\infty$ für $C \rightarrow 0$), bewegen sich in der unteren Hälfte bei wachsendem C auf die Null zu (werden also wegen des Minuszeichens größer), erreichen die Null beim Durchgang durch die reelle Achse, und steigen in der oberen Hälfte wegen $X = j\omega L$ mit wachsendem L weiter an. Für L gegen Unendlich streben sie über alle Grenzen ($jX = j\omega L \rightarrow \infty$ für $L \rightarrow \infty$).

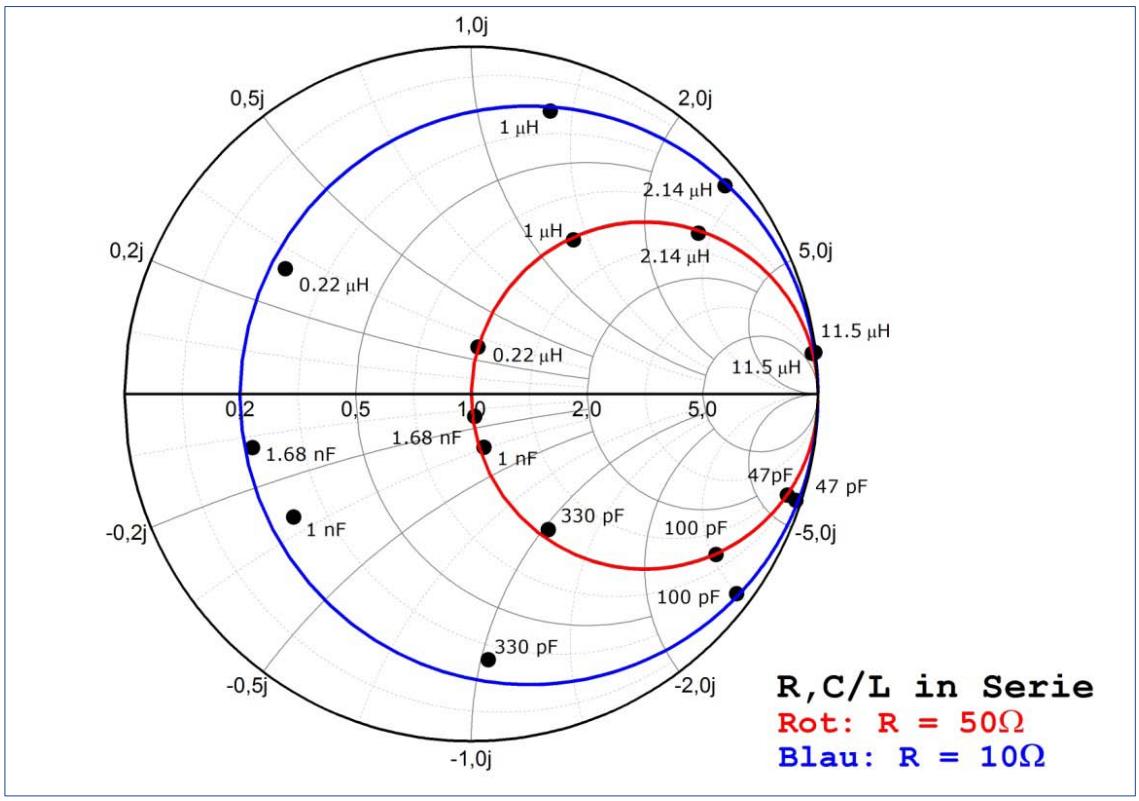

Abbildung 4 Smith-Diagramm mit Messpunkten (ausgefüllte schwarze Kreise) der Impedanz Z einer Reihenschaltung von Widerstand (Resistanz) R und Reaktanz X. Widerstand R konstant, Reaktanz X variabel (variiert durch Verändern der Kapazität C bzw. Induktivität L bei konstanter Frequenz f). Die Punkte entsprechen den in Tabelle 2 aufgelisteten Werten der beiden Messreihen (R = 50 Ohm und R = 10 Ohm). Die Theorie ergibt für R = 50 Ohm den roten, für R = 10 Ohm den blauen Kreis.

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist, kurz zusammengefasst: Bewegt man sich im Smith-Diagramm auf einem Kreis konstanter Resistanz im Uhrzeigersinn, wird die Reaktanz *X* größer, bewegt man sich im Gegenuhrzeigersinn, wird sie kleiner.

6.6 Messung: Induktivität/Kapazität als Shunt (parallel) zu einem Widerstand

Nach der Serienschaltung jetzt zur *Parallel*schaltung: ein konstanter ohmscher Widerstand mit variabler Kapazität bzw. Induktivität als *Shunt*. Es gibt wiederum zwei Messreihen, eine mit $R = 50\ \Omega$, die andere mit $R = 200\ \Omega$ als konstantem Widerstand. Wir benutzen wie vorhin den Antennen-Analysator *FA-VA5* in der Betriebsart Einzelfrequenzmessung mit $f = 10$ MHz. Im kapazitiven Bereich

Tabelle 3 Messung der Impedanz Z einer Parallelschaltung von Widerstand R und Reaktanz X. Frequenz f = 10 MHz. Zwei Messreihen mit jeweils konstantem Widerstand (R = 50 Ohm und R = 200 Ohm) und variabler Reaktanz.

R/Ω	C/pF	L/µH	Re(Z)/Ω	Im(Z)j/Ω	Re(z)	Im(z)j
50	47		49,6	-2,4j	0,992	-0,048j
50	100		46,2	-10,0j	0,924	-0,202j
50	330		26,6	-19,4j	0,532	-0,388j
50	680		10,2	-14,7j	0,204	-0,294j
50	1000		5,1	-9,1j	0,102	-0,182j
50	1680		1,9	-3,2j	0,038	-0,064j
50		0,143	1,9	12,2j	0,038	0,244j
50		0,220	4,1	16,1j	0,082	0,332j
50		0,360	7,1	20,6j	0,142	0,412j
50		0,538	14,0	25,9j	0,280	0,518j
50		1,00	30,3	28,4j	0,606	0,568j
50		2,14	43,3	21,4j	0,866	0,428j
50		2,59	44,8	19,6j	0,896	0,392j
50		11,5	50,0	8,6j	1,000	0,172j
200	47		139	-87,6j	2,780	-1,752j
200	100		70,4	-91,1j	1,408	-1,822j
200	330		15,4	-42,3j	0,308	-0,846j
200	1000		2,5	-10,4j	0,050	-0,208j
200	1680		1,2	-3,4j	0,024	-0,068j
200		0,143	1,2	12,6j	0,024	0,252j
200		0,220	1,7	18,0j	0,034	0,360j
200		0,538	5,7	33,8j	0,114	0,676j
200		1,00	20,0	61,9j	0,400	1,238j
200		2,14	64,7	96,3j	1,294	1,926j
200		11,5	190,0	44,4j	3,800	0,888j

werden dieselben Kondensatoren wie bei der Serienschaltung benutzt, im induktiven Bereich kommen zusätzlich zu den bisherigen Spulen einige hinzu. Tabelle 3 zeigt die Messdaten, Abb. (5) das zugehörige Smith-Diagramm. Die Messpunkte liegen wiederum, zumindest näherungsweise, auf den theoretisch berechneten Kreisen (rot: $R = 50$ Ohm, blau: $R = 200$ Ohm). Diese Kreise berühren sich, anders als bei der Serienschaltung, im Punkt (–1, j0), dem Kurzschluss (short circuit).

Die theoretisch berechneten Kreise in Abb. (5) sind im Übrigen die im vorigen Kapitel erwähnten Ortskurven konstanten Wirkleitwerts (konstanter Konduktanz) $G = 1/R$. Sie bilden einen Teil des Admittanz-Netzes im Smith-Diagramm. (Zur Erinnerung: Die Admittanz ist definiert als $Y = G + jB$,

mit $G = 1/R$ und $jB = -j/\omega L$ für induktive, $jB = j\omega C$ für kapazitive Kreise). Für die Messreihe mit dem ohmschen Widerstand $R = 200$ Ohm sind die Kapazitäts- und Induktivitätswerte C bzw. L neben den entsprechenden Punkten notiert. Sie zeigen: Bewegt man sich auf einem Kreis konstanter Konduktanz im Uhrzeigersinn, werden in der oberen Hälfte des Diagramms die Werte von L, in der unteren Hälfte die Werte von C größer. Die Suszeptanz $B = 1/X$ beginnt am Kurzschlusspunkt mit dem Wert Minus Unendlich ($jB = -j/\omega L \to \infty$ für $L \to 0$), bewegt sich in der oberen Hälfte mit wachsendem L auf die Null zu, erreicht die Null beim Durchgang durch die reelle Achse, und steigt in der unteren Hälfte wegen $jB = j\omega C$ weiter an. Für $C \to \infty$ streben sie über alle Grenzen ($jB = j\omega C \to \infty$ für $C \to \infty$).

Das Ergebnis des Abschnitts ist, wiederum kurz zusammengefasst: Bewegt man sich im Admittanz-Koordinatensystem des Smith-Diagramms entlang einer Kurve konstanter Konduktanz G im Uhrzeigersinn, wird die Suszeptanz B größer, bewegt man sich im Gegenuhrzeigersinn, wird sie kleiner.

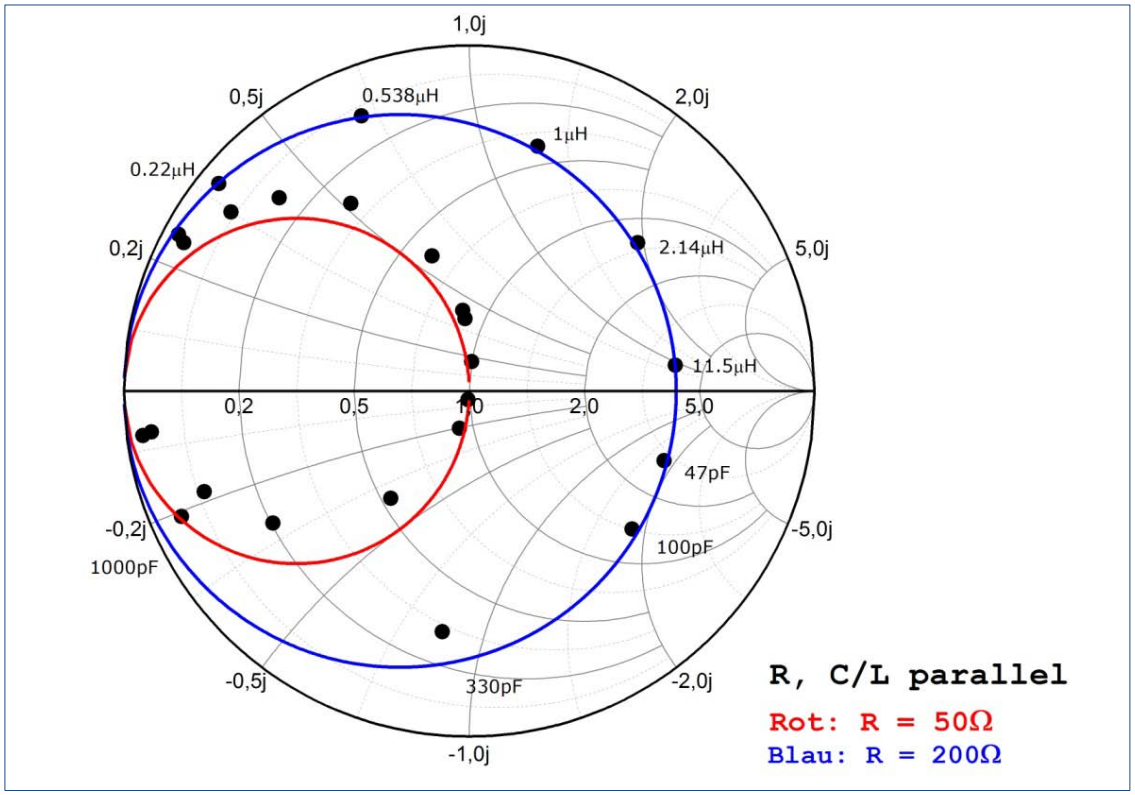

Abbildung 5 Smith-Diagramm mit Messpunkten (ausgefüllte schwarze Kreise) der Impedanz Z einer Parallelschaltung von Widerstand (Resistanz) R und Kondensator bzw. Spule. Widerstand R konstant, Reaktanz X variabel (variiert durch Verändern der Kapazität C bzw. Induktivität L bei konstanter Frequenz f). Die Punkte entsprechen den in Tabelle 3 gelisteten Werten der beiden Messreihen (R = 50 Ohm und R = 200 Ohm). Die Werte C bzw. L der Messreihe R = 200 Ohm sind neben den entsprechenden Punkten notiert. Die Theorie ergibt im Fall der Parallelschaltung Kreise, die durch Abbildung der Geraden konstanter Konduktanz G = 1/R in der Admittanz-Ebene entstehen. Diese Kreise berühren sich, wie die Skizze zeigt, im Kurzschluss-Punkt des Smith-Diagramms. Rot: Kreis für R = 50 Ohm, blau: Kreis für R = 200 Ohm.

Die Suszeptanz B verhält sich also im Admittanz-Koordinatennetz in derselben Weise wie die Reaktanz X im Impedanz-Koordinatennetz des normalen Smith-Diagramms.

Aber: Eine Induktivität L beispielsweise, die in *Serie* zu einer gegebenen Impedanz hinzugefügt wird, erhöht die Reaktanz um den Wert $jX = j\omega L$ und bedeutet im Smith-Diagramm ein Fortschreiten auf einem Kreis konstanten (ohmschen) Widerstands im *Uhrzeigersinn* – das war die Regel im vorherigen Abschnitt. In diesem Abschnitt heißt es: Wird eine Induktivität L als *Shunt* (parallel) hinzu geschaltet, wird die entsprechende Suszeptanz $jB = -j/\omega L$ hinzu addiert. Wegen des negativen Vorzeichens führt diese Addition aber im Resultat zu einem *kleineren* jB, und man bewegt sich im Admittanz-Koordinatennetz auf dem Kreis konstanten (ohmschen) Leitwerts G im *Gegenuhrzeigersin*n.

Dazu ein Zahlenbeispiel: Wir gehen aus von dem Punkt in Abb. (5), der auf dem blauen Kreis für R = 200 Ω liegt und mit »2.14 µH« bezeichnet ist. Seine Admittanz ist (theoretisch)

$$Y = G + jB = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} = \frac{1}{200\Omega} - j\frac{1}{6{,}283\cdot 10^{7}s^{-1}\cdot 2{,}14\cdot 10^{-6}VsA^{-1}} = (0{,}005 - j0{,}007437)\Omega^{-1}.$$

Normiert auf Y_0 = 1/50Ω, ergibt das $y = 0{,}25 - j0{,}3719$.

Fügt man jetzt in der zugehörenden Schaltung eine Spule der Induktivität ΔL = 1,881 µH als Shunt hinzu, beträgt die *Änderung* der Suszeptanz

$$j\Delta B = -j\frac{1}{\omega\Delta L} = -j\frac{1}{6{,}283\cdot 10^{7}s^{-1}\cdot 1{,}88\cdot 10^{-6}VsA^{-1}} = -j0{,}008463\Omega^{-1}.$$

Die resultierende Admittanz ist damit

$$Y + \Delta Y = (0{,}005 - j0{,}007437 - j0{,}008463)\Omega^{-1} = (0{,}005 - j0{,}0159)\Omega^{-1}$$

mit dem normierten Wert $y + \Delta y = 0{,}25 - j0{,}795$.

Dieser geänderten Admittanz entspricht der mit »1µH« bezeichnete Punkt auf dem blauen Kreis in Abb. (5). Wir haben uns also durch das Hinzufügen eines Shunts mit der Induktivität ΔL = 1,88 µH auf einem Kreis konstanten Leitwerts im *Gegenuhrzeigersinn* bewegt. Zu bemerken ist jedoch: Unsere Rechnung benutzt die aus L und ω abgeleiteten theoretischen Werte für Y bzw. jB. Die in Abb. (5) dargestellten *Messpunkte* werden deshalb nur innerhalb des Messfehlers reproduziert.

Unser Ausflug in die Praxis sollte vor Augen führen, dass sich Parallel- und Serienschaltung durchaus unterschiedlich verhalten. Eine kurz gefasste Navigationsregel gibt es im nächsten Abschnitt.

6.7 Hinzuschalten von C (Kapazität) und L (Induktivität) zu beliebiger Schaltung

Um die Impedanz (Admittanz) eines Leitungsabschlusses zu verändern (zum Beispiel bei der Anpassung einer Antenne an den Senderausgang), benutzt man vielfach Spulen oder Kondensatoren, die in Reihe oder als Shunt (parallel) hinzugefügt werden. Wir überlegen, wie sich diese Veränderung im Smith-Diagramm bemerkbar macht – und greifen dabei auf die Diskussion in den vorherigen Abschnitten zurück. Eine gut einprägsame Regel entnehme ich dem Artikel von F. Caspers[1]:

Für ein in Serie hinzu geschaltetes Element (Induktivität bzw. Kapazität) bewege dich auf den Kreisen konstanten Widerstands im Impedanz-Koordinatennetz des Smith-Diagramms. Bei einer Induktivität (L) schreite im Uhrzeigersinn fort, bei einem Kondensator (Kapazität, C) im Gegenuhrzeigersinn. Für parallel hinzu gefügte Elemente bewege dich auf den Kreisen konstanten Leitwerts (Konduktanz) im Admittanz-Netz des Diagramms. Schreite im Uhrzeigersinn fort bei einer Kapazität (C), im Gegenuhrzeigersinn bei einer Induktivität (L).

In den Abbildungen (6) und (7) ist diese Regel symbolisch dargestellt. Die (roten und blauen) Pfeile bedeuten die jeweilige Bewegungsrichtung beim *Hinzufügen* des betreffenden Elements, also bei einem in Serie oder als Shunt hinzugefügten L bzw. C.

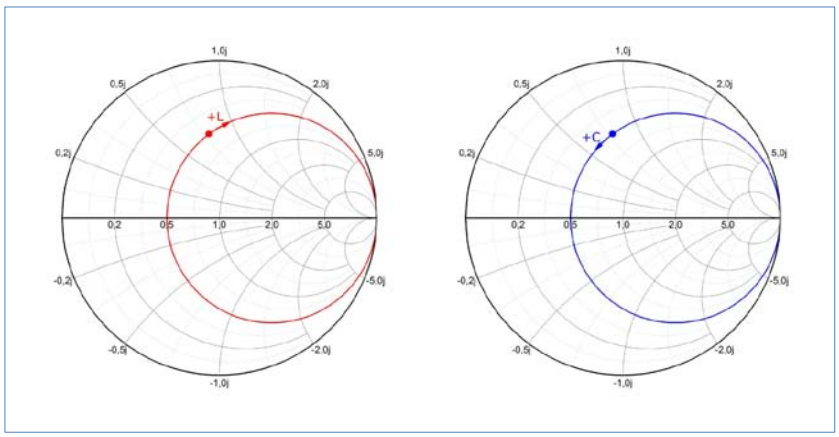

Abbildung 6 Ein in Serie zur Impedanz Z hinzu geschaltetes L bedeutet ein Fortschreiten auf einem Kreis konstanten Widerstands im Uhrzeigersinn (rot), ein in Serie hinzu geschaltetes C ein Fortschreiten im Gegenuhrzeigersinn (blau).

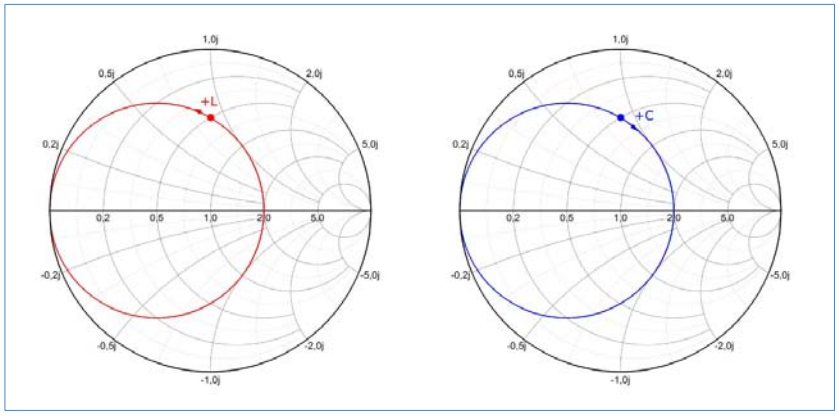

Abbildung 7 Ein als Shunt (parallel) zur Impedanz Z hinzu geschaltetes L bedeutet ein Fortschreiten auf einem Kreis konstanten (ohmschen) Leitwerts im Gegenuhrzeigersinn (rot), ein als Shunt hinzu geschaltetes C ein Fortschreiten im Uhrzeigersinn (blau).

6.8 Impedanz-Transformation durch eine (verlustfreie) Leitung

Eine verlustlose *HF*-Leitung (Koaxialkabel) der Länge l transformiert den Reflexionsfaktor Γ_{load} an ihrem Abschluss in den Faktor

(2) $$\Gamma_{in} = \Gamma_{load} \cdot e^{-j(2\beta l)}$$

an ihren Eingangsklemmen. Dabei ist $\beta = 2\pi/\lambda$ der Ausbreitungskoeffizient (oder die Wellenzahl) der *HF*-Welle mit der Wellenlänge λ. Im Smith-Diagramm entspricht der Transformation eine Drehung im *Uhrzeigersinn* um den Winkel $2\beta l$ um den Ursprung, dargestellt in Abb. (8).

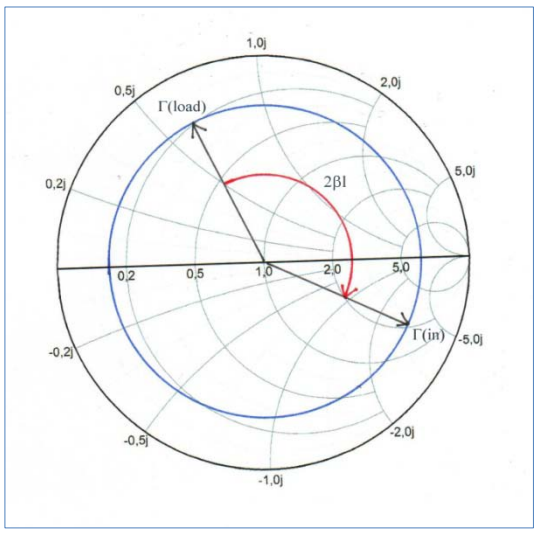

Abbildung 8 Transformation des Reflexionsfaktors durch ein Kabel der Länge l. Es erfolgt eine Drehung des Zeigers um den Ursprung des Smith-Diagramms mit dem Winkel 2βl im Uhrzeigersinn.

Wir wollen mit dem *FA-VA5* nachprüfen, ob sich der Winkel $2\beta l$ im Experiment bestätigt. Zunächst messen wir direkt am Ausgang des Analysators. Für eine Spule mit L = 0,22 µH in Serie mit einem (ohmschen) Widerstand R = 10 Ω erhalten wir bei f = 10 MHz eine Impedanz Z = 10,4Ω + j14,7Ω (Theoretisch sollten es Z = 10Ω + j13,8Ω sein, da $j\omega L = j\,2\pi\cdot 10\cdot 10^{6}\mathrm{s}^{-1}\cdot 0{,}22\cdot 10^{-6}\mathrm{Vs/A} = j13{,}8\Omega$). Die

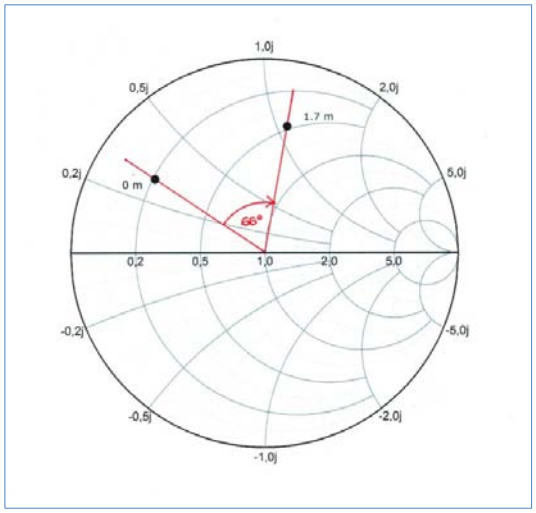

Abbildung 9 Messung der Drehung des Reflexionsfaktor-Zeigers durch ein Kabel der Länge l = 1,70 m. Die Theorie ergibt für den Drehwinkel 2βl = 62° (siehe Text).

normierte Impedanz ist also z = 0,208 + j 0,294. Im Smith-Diagramm Abb. (9) ist dieser Wert als der mit »0 m« (Null Meter) bezeichnete Punkt dargestellt. Mit einem l = 1,70 m langen Kabel (*RG*174-Koaxialkabel) zwischen Analysator und unserer *LR*-Kombination erhalten wir Z = 23,5Ω + j54,2Ω. Normiert sind das z = 0,47 + j1,08. Der entsprechende Punkt, in Abb. (9) mit »1.7 m« (1,7 Meter) bezeichnet, hat von der »0 m«-Marke den Winkelabstand 66° mit einer Unsicherheit von etwa ± 2°. Theoretisch müssten wir messen

$$2\beta l \;=\; 2\cdot\frac{2\pi}{\lambda}\cdot l \;=\; 2\cdot\frac{2\pi}{30m\cdot 0{,}66}\cdot 1{,}70m \;=\; 1{,}08\ .$$

Dabei haben wir die Vakuum-Wellenlänge (30 m für f = 10 MHz), wie im Nenner des Bruchs zu sehen, mit dem Verkürzungsfaktor $1/\sqrt{\varepsilon_r}$ = 0,66 für Polyäthylen (ε_r = 2,29) multipliziert. Der Winkel 1,08

(Bogenmaß) hat im Gradmaß den Wert $1{,}08 \cdot 180°/\pi = 61{,}8°$. Die Übereinstimmung mit dem Messwert könnte also besser sein.

Literatur

[1] F. Caspers, *RF Engineering Basic Concepts – The Smith Chart*, Geneva, *CERN* (im Internet)

7. L-Netzwerk-Anpassung

7.1 Warum Impedanz-Anpassung?

Ein Generator liefert elektrische Energie über eine Leitung an einen Verbraucher. Die Energie sollte ohne große Verluste zum Verbraucher gelangen. Wird sie in Form von Wechselstrom übertragen, muss man dafür sorgen, dass sich möglichst keine stehende Welle auf der Leitung bildet – es genügt nicht, dass der ohmsche Widerstand der Leitung verschwindend gering ist. Stehende Wellen und ohmscher Widerstand bewirken Verluste. Stehende Wellen – um die geht es hier – entstehen durch Reflexion der Welle an Sprungstellen des Wechselstromwiderstands (der Impedanz). Eine dieser Stellen ist das Ende der Leitung. Dort befindet sich der Last-Widerstand des Verbrauchers, dessen Impedanz an die der Leitung anzupassen ist. Im Folgenden wird eins der Anpassungs-Verfahren beschrieben.

7.2 Navigationsregel (Wiederholung)

Eine gegebene Impedanz kann verändert werden, indem man Induktivitäten (*L*) oder Kapazitäten (*C*) hinzu schaltet. Im Smith-Diagramm verschieben sich dadurch ihre Koordinaten – in welcher Weise, das besagt die im vorigen Kapitel zitierte Regel[1]:

> Für ein in Serie hinzu geschaltetes Element (Induktivität bzw. Kapazität) bewege dich auf den Kreisen konstanten Widerstands im Impedanz-Koordinatennetz des Smith-Diagramms. Bei einer Induktivität (*L*) schreite im Uhrzeigersinn fort, bei einem Kondensator (Kapazität, *C*) im Gegenuhrzeigersinn. Für als Shunt (also parallel) hinzu gefügte Elemente bewege dich auf den Kreisen konstanten Leitwerts (Konduktanz) im Admittanz-Netz des Diagramms. Schreite im Uhrzeigersinn fort bei einer Kapazität (*C*), im Gegenuhrzeigersinn bei einer Induktivität (*L*).

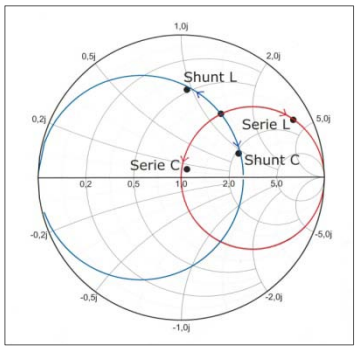

Abbildung 1 Merkregel: Verschiebung der Koordinaten einer Impedanz durch Hinzufügen von L und C. Die ausgefüllten schwarzen Kreise sind Messpunkte, siehe Anhang (A)

Im Folgenden geht es darum, die Impedanz Z_L einer Last (Index *L*) an eine Leitung mit gegebener Impedanz Z_0 anzupassen. Dabei greifen wir auf diese Regel zurück.

7.3 L-Netzwerk-Anpassung

Zur Anpassung benutzen wir Elemente, die reine Reaktanzen darstellen, also Induktivitäten und Kapazitäten. Ohmsche Widerstände werden nicht verwandt, da wir Leistungsverluste durch Joulesche Wärme vermeiden wollen. Den geringsten Aufwand verursachen so genannte *L*-Netzwerke, die aus einer in Serie und einer als Shunt geschalteten Reaktanz (jX bzw. jB) bestehen. Abbildungen (2) und (3) zeigen die anzupassende (Last-)Impedanz $Z_L = R_L + jX_L$ und die beiden möglichen Kombinationen der Reaktanzen jX und jB. Anzupassen ist Z_L an die Impedanz Z_0 der Leitung. Welche der beiden Schaltungen anzuwenden ist, hängt davon ab, ob der ohmsche Anteil R_L der Last größer oder kleiner

ist[2] als die Leitungs-Impedanz Z_0. Die Schaltung nach Abb. (2) ist im Fall $R_L > Z_0$ anzuwenden (*L*-Netzwerk (*A*)), die Schaltung nach Abb. (3) im Fall $R_L < Z_0$ (*L*-Netzwerk (*B*)).

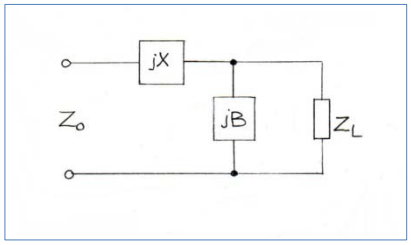

Abbildung 2 L-Netzwerk (A) für $R_L > Z_0$

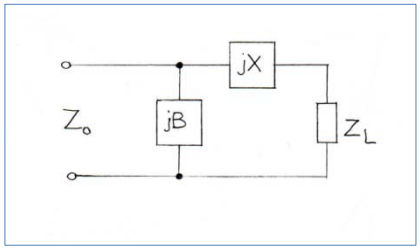

Abbildung 3 L-Netzwerk (B) für $R_L < Z_0$

Die schon erwähnte Navigationsregel benutzen wir, um die zur Anpassung benötigten Werte *jX* und *jB* aus dem Smith-Diagramm abzulesen[3]. Um nahe an der Praxis zu bleiben, tun wir das anhand von zwei Beispielen, siehe weiter unten.

Im Smith-Diagramm wird mit normierten Größen gearbeitet. Deshalb folgende (pardon – vielleicht überflüssige) Bemerkung zuvor: Die Impedanz $Z = R + jX$ (R = Resistanz, X = Reaktanz) wird normiert, in dem man sie durch eine Bezugsimpedanz Z_0 dividiert. Das Ergebnis, die normierte Impedanz, schreiben wir wie üblich in Kleinbuchstaben, also:

$$Z = R + jX$$

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Z}{Z_0} = \frac{R}{Z_0} + \frac{jX}{Z_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad z = r + jx$$

Die Admittanz $Y = G + jB$ (G = Konduktanz, B = Suszeptanz) wird normiert, indem man sie durch die Bezugsadmittanz $1/Z_0$ dividiert. Rechnerisch einfacher ist eine Multiplikation mit Z_0. Auch hier wird das Ergebnis mit kleinen Buchstaben geschrieben, also:

$$Y = G + jB$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad Y \cdot Z_0 = G \cdot Z_0 + jB \cdot Z_0$$

$$\Leftrightarrow \quad y = g + jb$$

Die Umformungen $g = GZ_0$ und $jb = jBZ_0$ sind erfahrungsgemäß gewöhnungsbedürftig. Da es in den *L*-Netzwerken um die Größen *jX* und *jB* geht, merke insbesondere:

$$(3) \quad jx = \frac{jX}{Z_0} \quad \Leftrightarrow \quad jX = jxZ_0$$

$$(4) \quad jb = jBZ_0 \quad \Leftrightarrow \quad jB = \frac{jb}{Z_0}$$

Wichtig ist, zwischen der Reaktanz *jX* (in der Einheit Ω) und dem normierten Wert *jx* (ohne Einheit) zu unterscheiden. Dasselbe gilt für die Suszeptanz *jB* (Einheit S = 1/Ω) und dem normierten Wert *jb* (ohne

Einheit). Als Bezugsimpedanz benutzen wir $Z_0 = 50\ \Omega$, die Impedanz (den Wellenwiderstand) unseres vielfach benutzten Koaxialkabels, z. B. des Kabels mit der Bezeichnung *RG*58.

Die Anpassung mit Hilfe des Smith-Diagramms startet am Punkt der Last-Impedanz

$$(5) \qquad \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L}{Z_0} + \frac{jX_L}{Z_0} \Leftrightarrow z_L = r_L + jx_L \ .$$

Wir entscheiden zunächst, ob Netzwerk (*A*) oder Netzwerk (*B*) infrage kommt. Dazu drücken wir die oben genannten Kriterien $R_L > Z_0$ und $R_L < Z_0$ in normierter Sprache aus: Bedingung $R_L > Z_0$, in normierter Sprache $r_L > 1$, beschreibt im Smith-Diagramm den Bereich im Innern des Kreises $z = 1 + jx$. Dies ist das grau unterlegte Gebiet in Abb. (4). Ein z_L in diesem Gebiet erfordert also Netzwerk (*A*). Ist $R_L < Z_0$, normiert also $r_L < 1$, liegt z_L im Gebiet außerhalb des Kreises $z = 1 + jx$, also im grau unterlegten Gebiet der Abb. (5). In diesem Fall ist Netzwerk (*B*) zu benutzen.

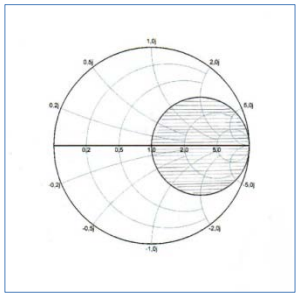

Abbildung 4 Das grau schraffierte Gebiet ist das Innere des Kreises z = 1 + jx. Liegt der Punkt der Last-Impedanz z_L in diesem Bereich, ist $R_L > Z_0$ und deshalb Anpassungs-Netzwerk (A) zu benutzen.

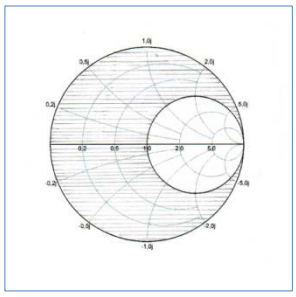

Abbildung 5 Liegt der Punkt der Last-Impedanz z_L im Äußeren des Kreises z = 1 + jx (grau schraffiert), ist $R_L < Z_0$ und deshalb Anpassungs-Netzwerk (B) zu benutzen.

Damit liegt die Art der Anpassungsschaltung (*A* oder *B*) fest. Die Strategie ist, vom Punkt z_L ausgehend, einen Pfad zu finden, der zum Ursprung des Diagramms führt. Dies ist der Punkt $z = 1 + j0$, hier ist $Z/Z_0 = 1$ oder $Z = Z_0 = 50\ \Omega$. Das bedeutet Anpassung.

7.4 Beispiel $R_L > Z_0$ (Netzwerk (A)): $Z_L = (100 + j\,62.832)\ \Omega$

Wir betrachten als erstes Beispiel eine Last-Impedanz, die aus einer Spule und einem in Reihe geschalteten Widerstand besteht. Die Spule habe die Induktivität $L = 1{,}0\ \mu\text{H}$, der Widerstand den Wert $R = 100\ \Omega$. Bei der Frequenz $f = 10$ MHz (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 62{,}832 \cdot 10^6/\text{s}$) beträgt die Impedanz der Schaltung $Z_L = (100 + j\,62{,}832)\ \Omega$. Sie soll an eine Leitung mit $Z_0 = 50\ \Omega$ angepasst werden. Wegen $R_L > Z_0$ ist Anpassungs-Netzwerk (*A*), Abb. (2), zu »berechnen«.

Die Last hat die normierte Impedanz $z_L = (100 + j\,62{,}832)\ \Omega/50\Omega = 2 + j\,1{,}257 \approx 2 + j1{,}26$. Dem entspricht die normierte Admittanz $y_L = 0{,}36 - j\,0{,}23$. Die Lage von z_L (bzw. y_L) wird im Smith-Diagramm markiert, von diesem Punkt aus startet unsere »Rechnung«, sie besteht im Wesentlichen aus Ablesen.

Abbildung (6) zeigt das hier benutze Diagramm. Es enthält die üblichen Impedanz-Koordinaten (rotes Netz) und dazu das Netz der Admittanz-Koordinaten (blaue Linien). In diesem doppelten Koordinatensystem bewegen wir uns auf den in der Abbildung eingezeichneten »Pfaden«. Ihre Bedeutung wird im Folgenden erläutert.

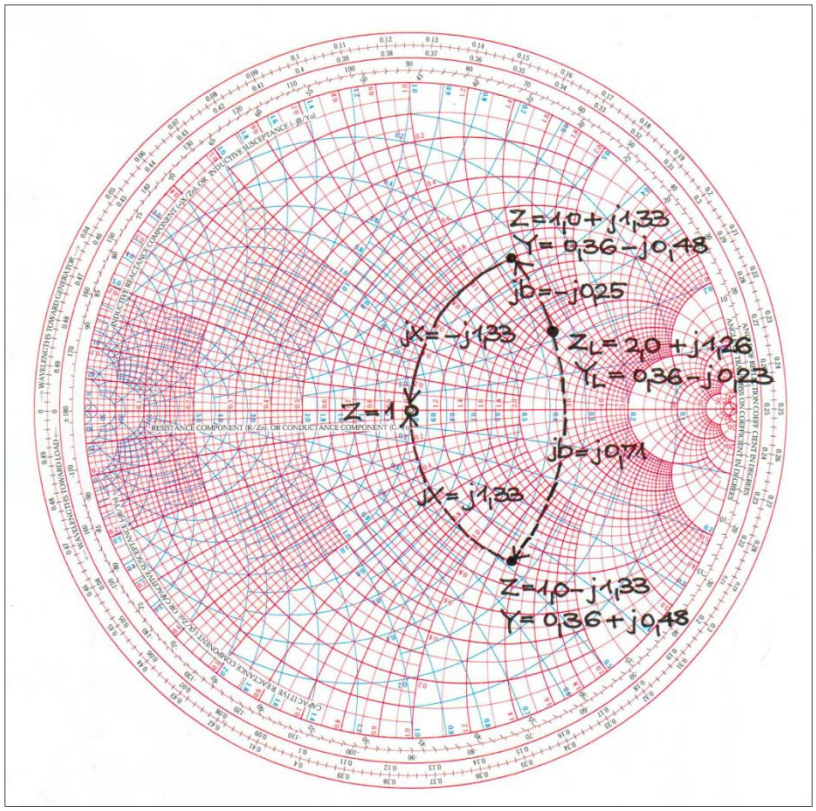

Abbildung 6 Smith-Diagramm mit Impedanz-Koordinaten (rot) und Admittanz-Koordinaten (blau). Die Last z_L = 2.0+j1.26 kann auf zwei Arten an die Impedanz der Leitung (z = 1) angepasst werden: (1) durch eine Induktivität als Shunt (jb = -j0.25) und eine Kapazität in Reihe zur Parallelschaltung von Last und Induktivität (jx = -j1.33), (2) durch eine Kapazität als Shunt (jb = j0.71) und eine Induktivität in Reihe zur Parallelschaltung von Last und Kapazität (jx = j1.33).

Bei der »Rechnung« geht man von der Last aus und arbeitet sich von dort durch bis zu den Anschlussklemmen des Kabels – mit Zwischenstationen, die hier »*jX*« und »*jB*« heißen. Netzwerk (*A*) erfordert daher, in einem ersten Schritt die zur Last parallel zu schaltende Suszeptanz *jB* zu bestimmen. Dazu suchen wir im Admittanz-Koordinatensystem des Diagramms (Abb. 6) den Kreis konstanter *Konduktanz*, der durch den Punkt y_L geht – meist muss man hier interpolieren. Auf diesem Kreis bewegen wir uns zunächst. Der Kreis hat die Gleichung $y = 0{,}36 + jb$. Er schneidet den Kreis konstanter *Resistanz* $r = 1$, das ist der Kreis $z = 1 + jx$, in zwei Punkten. Es gibt also zwei Möglichkeiten der Anpassung. Die Schnittpunkte sind $y = 0{,}36 - j\,0{,}48$ und $y = 0{,}36 + j\,0{,}48$. Wir lesen ab, um wie viele Einheiten sich die Suszeptanz *jb* ändert, wenn wir uns auf dem Kreis $y = 0{,}36 + jb$ vom Ausgangspunkt y_L zu diesen Schnittpunkten bewegen:

$$jb = -j0{,}48 - (-j0{,}23) = -j\,0{,}25 \quad \text{und} \quad jb = +j0{,}48 - (-j0{,}23) = +j0{,}71 \quad \text{oder}$$

$$jB = -j\,0{,}25/50\Omega = -j0{,}005/\Omega \quad \text{und} \quad jB = +j\,0{,}71/50\Omega = +j\,0{,}0142/\Omega.$$

Ein negatives *B* entspricht einer Induktivität (wegen $jB = -j/\omega L$). Aus $jB = -j0{,}005/\Omega$ folgt also

$$L = -1/\omega B = 1/(62{,}832\cdot 10^6\cdot 0{,}005/\Omega\text{s}) = 3{,}18\ \mu\text{H}.$$

Der zweite Wert für *B* ist positiv, wird also durch eine Kapazität

$$C = B/\omega = 0{,}0142/(62{,}832\cdot 10^6\Omega/\text{s}) = 226\ \text{pF}$$

realisiert. Diese beiden Elemente, $L = 3{,}18\ \mu$H bzw. $C = 226$ pF, sind somit als Shunt, also parallel zur Last zu schalten.

Zu dieser Parallelschaltung wird im zweiten Schritt jX addiert. Dazu bewegen wir uns weiter auf dem Kreis konstanter *Resistanz* $z = 1 + jx$ (im Impedanz-Koordinatensystem des Diagramms Abb. 6), und zwar von den oben gefundenen Schnittpunkten auf den Punkt der Anpassung $z = 1 + j0$ zu. Dabei zählen wir wiederum – dieses Mal, um wie viele Einheiten sich die Reaktanz jx auf dem Weg dorthin geändert hat. Die Schnittpunkte sind $z = 1 + j1{,}33$ und $z = 1 - j1{,}33$. Daher erhalten wir

$$jx = j0 - j1{,}33 = -j1{,}33 \quad \text{und} \quad jx = j0 - (-j1{,}33) = +j1{,}33 \quad \text{oder}$$

$$jX = -j1{,}33 \cdot 50\Omega = -j66{,}5\Omega \quad \text{und} \quad jX = +j1{,}33 \cdot 50\Omega = +j66{,}5\Omega\,.$$

Ein negatives X entspricht einer Kapazität ($jX = -j/\omega C$), aus $jX = -j66{,}5\Omega$ folgt daher

$$C = -1/\omega X = 1/\,(62{,}832 \cdot 10^6 \cdot 66{,}5\Omega/\mathrm{s}) = 239\ \mathrm{pF}.$$

Der zweite Wert für X ist positiv, stellt also eine Induktivität dar ($jX = j\omega L$). Aus $jX = +j\,66{,}5\Omega$ folgt

$$L = X/\omega = 66{,}5\Omega/(62{,}832 \cdot 10^6/\mathrm{s}) = 1{,}06\ \mu\mathrm{H}.$$

Damit sind die beiden Möglichkeiten, die Last $Z_L = (100 + j\,62{,}83)\ \Omega$ an die Impedanz $Z_0 = 50\Omega$ anzupassen: (1) Eine Induktivität $L = 3{,}18\ \mu$H als Shunt zu Z_L und eine Kapazität $C = 239$ pF in Serie zur Parallelschaltung von Z_L und Induktivität L, und (2) eine Kapazität $C = 226$ pF als Shunt zu Z_L und eine Induktivität $L = 1{,}06\ \mu$H in Reihe zur Parallelschaltung von Z_L und Kapazität C.

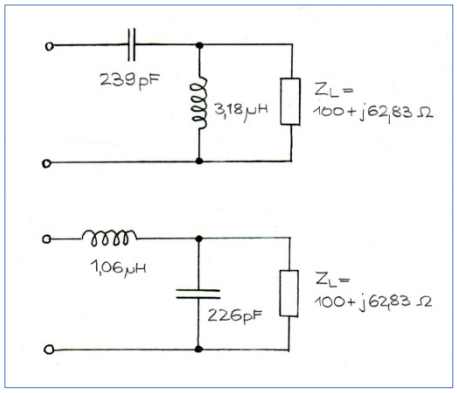

Abbildung 7 Zwei Möglichkeiten, die Impedanz der Last $Z_L = 100+j62.83\Omega$ an eine Leitung mit $Z_0 = 50\Omega$ anzupassen. Die Werte für L und C sind das Ergebnis der analytischen Rechnung.

Abbildung (7) zeigt die beiden möglichen Schaltungen. Unsere am Smith-Diagramm abgelesenen Näherungen stimmen recht gut mit den exakt berechneten Werten überein.

7.5 Beispiel $R_L < Z_0$ (Netzwerk (B)): $Z_L = (10 - j\,9.4735)\ \Omega$

Im zweiten Beispiel besteht die Last-Impedanz aus einem Kondensator und einem in Reihe geschalteten Widerstand. Der Kondensator habe die Kapazität $C = 1{,}68$ nF, der Widerstand den Wert $R = 10\ \Omega$. Bei der Frequenz $f = 10$ MHz (Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 62{,}832 \cdot 10^6/\mathrm{s}$) beträgt die Impedanz der Schaltung $Z_L = (10 - j\,9{,}4735)\ \Omega$. Sie soll wie im ersten Beispiel an eine Leitung mit $Z_0 = 50\ \Omega$ angepasst werden. Wegen $R_L < Z_0$ ist jetzt Anpassungs-Netzwerk (B), Abb. (3), zu »berechnen«.

Die Impedanz der Last (normiert) beträgt $z_L = (10 - j\,9{,}4735)\ \Omega/50\Omega = 0{,}20 - j\,0{,}19$. Daraus folgt als normierte Admittanz $y_L = 2{,}63 + j\,2{,}50$. Der Punkt z_L (bzw. y_L) ist im Smith-Diagramm Abb. (8) eingetragen.

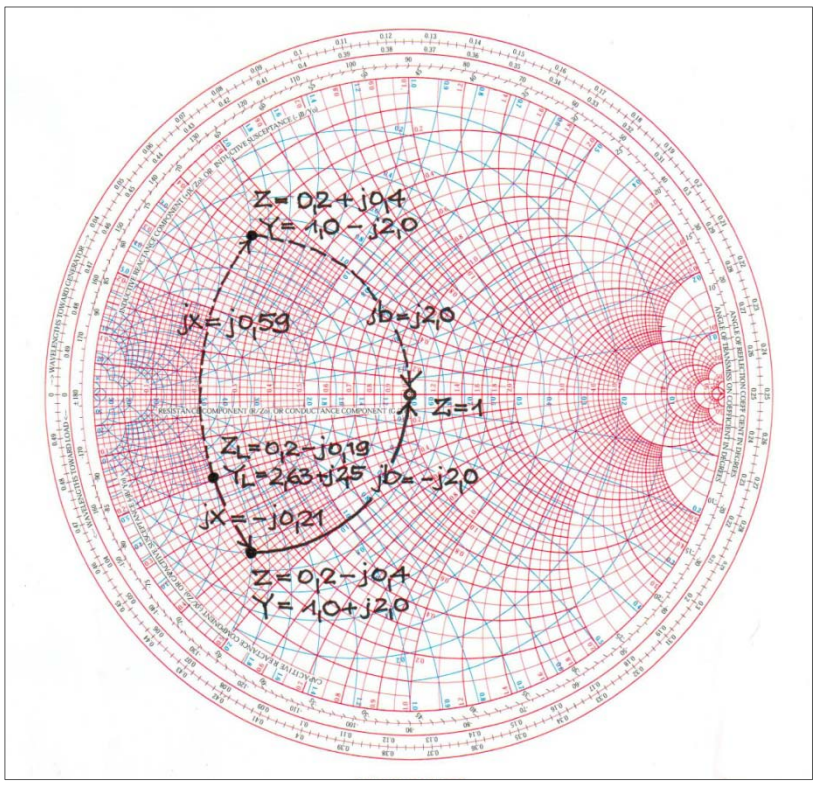

Abbildung 8 Smith-Diagramm mit Impedanz-Koordinaten (rot) und Admittanz-Koordinaten (blau). Die Last z_L = 0.2–j0.19 kann auf zwei Arten an die Impedanz der Leitung (z = 1) angepasst werden: (1) durch eine Kapazität in Serie zur Last (jx = –j0.21) und eine Induktivität als Shunt zur Serienschaltung von Kapazität und Last (jb = –j2.0), (2) durch eine Induktivität in Reihe mit der Last (jx = j0.59) und eine Kapazität als Shunt zur Reihenschaltung von Induktivität und Last (jb = j2.0). Diese aus dem Diagramm »abgelesenen« Schaltungen zeigt Abb. (9).

Da wir mit Anpassungs-Netzwerk (*B*) arbeiten, bestimmen wir dieses Mal zunächst die in Serie zur Last zu schaltende Reaktanz *jX*. Dazu suchen wir im Impedanz-Koordinatensystem des Diagramms den Kreis konstanter *Resistanz*, der durch den Punkt z_L geht. Auch hier muss meistens interpoliert werden. Dieser Kreis hat die Gleichung $z = 0{,}20 + jx$, er schneidet den Kreis konstanter *Konduktanz* $g = 1$, also den Kreis $y = 1 + jb$, in zwei Punkten. Es gibt auch hier zwei Möglichkeiten der Anpassung. Die Schnittpunkte sind $z = 0{,}20 + j\,0{,}40$ und $z = 0{,}20 - j\,0{,}40$. Wir lesen ab, um wie viele Einheiten sich die Reaktanz *jx* geändert hat, um von z_L zu diesen Schnittpunkten zu gelangen. Es sind

$$jx = j0{,}40 - (-j0{,}19) = +\,j\,0{,}59 \quad \text{und} \quad jx = -\,j0{,}40 - (-j0{,}19) = -\,j0{,}21 \quad \text{oder}$$

$$jX = +\,j\,0{,}59 \cdot 50\Omega = +\,j29{,}5\Omega \quad \text{und} \quad jX = -\,j0{,}21 \cdot 50\Omega = -\,j10{,}5\Omega.$$

Aus $jX = +\,j29{,}5\Omega$ folgt (wegen $jX = j\omega L$)

$$L = X/\omega = 29{,}5\Omega/(62{,}832 \cdot 10^6/\text{s}) = 469{,}5 \text{ nH}.$$

Ein negatives *X* entspricht einer Kapazität (wegen $jX = -\,j/\omega C$). Also folgt aus $jX = -\,j10{,}5\Omega$

$$C = -1/\omega X = -\,1/(-\,10{,}5\Omega \cdot 62{,}832 \cdot 10^6/\text{s}) = 1{,}52 \text{ nF}.$$

realisiert. Diese beiden Elemente, $L = 469{,}5$ nH bzw. $C = 1{,}52$ nF, sind somit in Reihe zur Last zu schalten.

Zu dieser Serienschaltung wird jetzt gemäß Netzwerkvariante (*B*) die Suszeptanz *jB* hinzugefügt, und zwar als Shunt. Wir bestimmen ihren Wert, indem wir von den oben genannten Schnittpunkten aus weiter gehen, und zwar auf dem Kreis konstanter *Konduktanz* $y = 1 + jb$ in Richtung auf den Anpassungspunkt $y = 1 + j0$. Dabei zählen wir wiederum – dieses Mal, um wie viele Einheiten sich die Suszeptanz *jb* ändert, um dorthin zu gelangen. Die Schnittpunkte (siehe oben) waren $z = 0{,}20 + j\,0{,}40$ und $z = 0{,}20 - j\,0{,}40$, oder $y = 1 - j\,2{,}0$ bzw. $y = 1 + j2{,}0$. Wir zählen

$$jb = j0 - (-\,j\,2{,}0) = +\,j2{,}0 \quad \text{und} \quad jb = j0 - j2{,}0 = -\,j2{,}0 \quad \text{oder}$$

$$jB = +j2{,}0/50\Omega = +j0{,}04/\Omega \quad \text{und} \quad jB = -j2{,}0/50\Omega = -j0{,}04/\Omega\,.$$

Aus $jB = j0{,}04/\Omega$ folgt (wegen $jB = j\omega C$)

$$C = B/\omega = +\,0{,}04/(62{,}832\cdot 10^6\Omega/\mathrm{s}) = 636{,}7\ \mathrm{pF}.$$

Ein negatives B entspricht einer Induktivität (wegen $jB = -\,j/\omega L$), also ist

$$L = -1/B\omega = -1/(62{,}832\cdot 10^6\cdot(-0{,}04/\Omega)/\mathrm{s}) = 397{,}9\ \mathrm{nH}.$$

Damit sind die beiden Möglichkeiten, die Last $Z_L = (10 - j\,9{,}4735)\ \Omega$ an die Impedanz $Z_0 = 50\ \Omega$ anzupassen: (1) Eine Induktivität $L = 469{,}5$ nH in Reihe zu Z_L und eine Kapazität $C = 636$ pF als Shunt zur Serienschaltung von Z_L und Induktivität L, und (2) eine Kapazität $C = 1{,}52$ nF in Reihe zu Z_L und eine Induktivität $L = 398$ nH als Shunt zur Reihenschaltung von Z_L und Kapazität C.

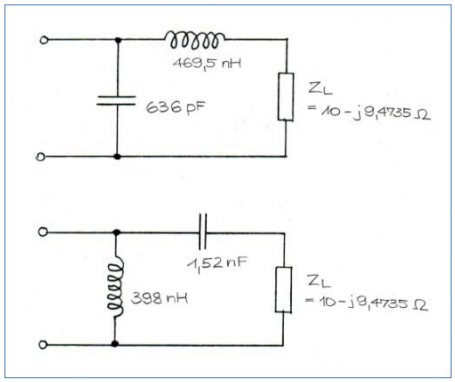

Abbildung 9 Zwei Möglichkeiten, die Impedanz der Last $Z_L = 10.0 - j9.47\Omega$ an eine Leitung mit $Z_0 = 50\Omega$ anzupassen. Die Werte für L und C sind das Ergebnis der analytischen Rechnung.

Abbildung (9) zeigt die beiden möglichen Schaltungen. Unsere am Smith-Diagramm abgelesenen Näherungen stimmen wiederum recht gut mit den exakt berechneten Werten überein.

7.6 Analytische Berechnung der Anpassungselemente L und C

Wie schon angedeutet, lassen sich die Anpassungselemente L und C lassen auch rechnerisch bestimmen, siehe Anhang (B). Dabei geht es im Wesentlichen um die Lösung einer quadratischen Gleichung. Im Internet gibt es Programme, die diese Rechnungen ausführen[4].

Anmerkungen und Literatur

[1] F. Caspers, *RF Engineering Basic Concepts – The Smith Chart*, Geneva, *CERN* (im Internet)

[2] Das Kriterium für die Bedingungen $R_L > Z_0$ und $R_L < Z_0$ (und die daraus folgende Zuordnung zu den beiden Schaltungsvarianten) ist die Forderung, dass die hinzu geschalteten Elemente rein imaginäre Größen sind, also jX bzw. jB mit X und B reell. Siehe Anhang (B).

[3] Die analytische Berechnung der jX und jB erfordert einige Rechenschritte, siehe Anhang (B). Die aus dem Smith-Diagramm abgelesenen Lösungen sind nicht exakt, aber in der Regel gute Näherungen.

[4] Beispiel: *RF Impedance Matching Calculator*, Analog Devices,
https://www.analog.com/en/design-center/interactive-design-tools/rf-impedance-matching-calculator.html

Anhang A

Ein kleines Experiment zur Navigationsregel[1]

Wir gehen aus von der Impedanz Z_L einer Induktivität L = 1 µH in Serie mit einem ohmschen Widerstand R = 50 Ω bei einer Frequenz f = 10 MHz. Theoretisch sollte sie betragen Z_L = (50 + j 62,8) Ω, die Messung ergab (50,3 + j 62,1) Ω. Hinzu geschaltet wurden (1) L = 2,14 µH und C = 330 pF, jeweils in Serie, (2) L = 2,44 µH und C = 100 pF, jeweils als Shunt. Das Ergebnis zeigt Tabelle

Tabelle

Netzwerk	Re(Z)/Ω	Im(Z)/Ω	Re(z)	Im(z)
Frequenz f=10 MHz				
1µH, 50 Ω	50,3	62,1	1,005	1,242
+ 330 pF Serie	53,8	6,3	1,076	0,126
+ 2,14 µH Serie	53,6	192,5	1,072	3,85
+ 2,44 µH Shunt	23,8	47,4	0,476	0,948
+ 100 pF Shunt	105	43,4	2,1	0,868

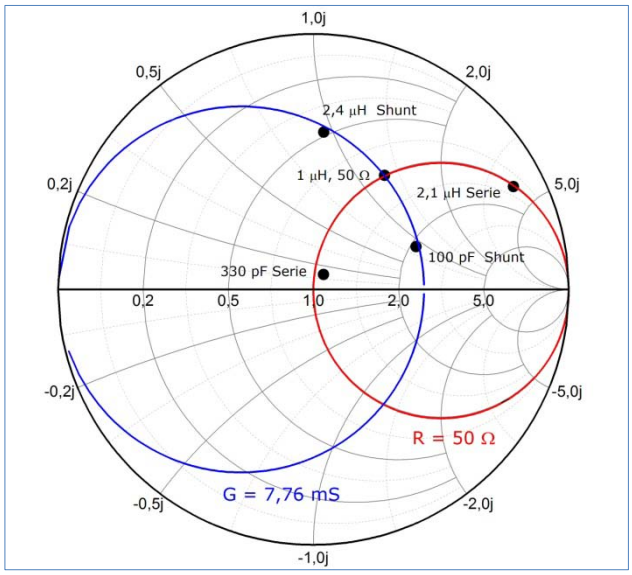

Abbildung Experiment zur Regel in Abb. (1) des Textes. Die Messpunkte entsprechen den Daten in der Tabelle.

Anhang B

L-Netzwerk-Anpassung – Analytische Rechnung (nach: A. Nassiri[1], ANL MIT)

B1. Netzwerk (A)

Die Impedanz $Z_L = R_L + jX_L$ ist an eine Leitung mit dem Wellenwiderstand Z_0 anzupassen. Zur Anpassung soll zunächst das *L*-Netzwerk (A) nach Abb. (1) benutzt werden, in dem jX und jB rein imaginäre Impedanzen sind. Das heißt, X und B sind reellwertige Größen, sie können beide durch Kapazitäten oder Induktivitäten realisiert werden.

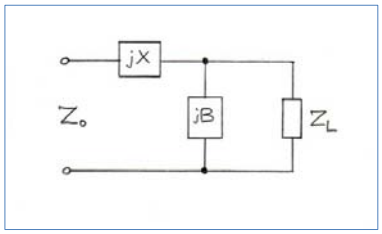

Abbildung 1 Anpassungs-L-Netzwerk (A). Die Rechnung (siehe nachfolgenden Text) ergibt, dass es nur im Fall $R_L > Z_0$ zur Anpassung verwandt werden kann.

Ein reflexionsfreier Übergang an den Eingangsklemmen erfordert

(1) $$Z_0 = Z_L \,\|\, (1/jB) + jX \quad , \quad \text{also}$$

$$Z_0 = \frac{Z_L \cdot \frac{1}{jB}}{Z_L + \frac{1}{jB}} + jX = \frac{(R_L + jX_L)\cdot\frac{1}{jB}}{R_L + jX_L + \frac{1}{jB}} + jX = \frac{R_L + jX_L}{jBR_L - BX_L + 1} + jX$$

$$Z_0 = \frac{R_L + jX_L}{(1 - BX_L) + jBR_L} + jX = \frac{R_L + jX_L + jX(1 - BX_L) - BR_L X}{(1 - BX_L) + jBR_L}$$

$$= \frac{(R_L - BXR_L) + j\left[X_L + X(1 - BX_L)\right]}{(1 - BX_L) + jBR_L}$$

Multipliziert man beide Seiten mit dem Nenner des Bruchs auf der rechten Seite, folgt

$$Z_0(1 - BX_L) + jZ_0BR_L = (R_L - BXR_L) + j\left[X_L + X(1 - BX_L)\right] .$$

Diese Gleichung gilt nur dann, wenn Real- und Imaginärteil auf beiden Seiten gleich sind. Also

(2) $$Z_0(1 - BX_L) = (R_L - BXR_L) \quad \Leftrightarrow \quad B(XR_L - Z_0X_L) = R_L - Z_0$$

(3) $$Z_0BR_L = X_L + X(1 - BX_L) \quad \Leftrightarrow \quad X(1 - BX_L) = BZ_0R_L - X_L$$

Das sind zwei Gleichungen für die Unbekannten B und X. Aus Gl. (3) folgt

$$X = \frac{BZ_0R_L - X_L}{1 - BX_L} .$$

Setzt man diesen Term für X in Gl. (2) ein, erhält man

$$
\begin{aligned}
& B\left(\frac{BZ_0R_L - X_L}{1 - BX_L}R_L - Z_0X_L\right) &&= R_L - Z_0 \\
\Leftrightarrow \quad & B\left[(BZ_0R_L^2 - X_LR_L - Z_0X_L(1 - BX_L)\right] &&= (R_L - Z_0)(1 - BX_L) \\
\Leftrightarrow \quad & B^2(Z_0R_L^2 + Z_0X_L^2) - B(X_LR_L + X_LZ_0 - X_LR_L + Z_0X_L) &&= R_L - Z_0 \qquad , \\
\Leftrightarrow \quad & B^2 - 2\frac{X_L}{(R_L^2 + X_L^2)}B - \frac{R_L - Z_0}{Z_0(R_L^2 + X_L^2)} &&= 0
\end{aligned}
$$

also eine quadratische Gleichung für B. Die Lösung ist (pq-Formel)

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \pm \sqrt{\frac{X_L^2}{(R_L^2 + X_L^2)^2} + \frac{R_L - Z_0}{Z_0(R_L^2 + X_L^2)}} \\
&= \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \pm \sqrt{\frac{Z_0X_L^2}{Z_0(R_L^2 + X_L^2)^2} + \frac{(R_L - Z_0)(R_L^2 + X_L^2)}{Z_0(R_L^2 + X_L^2)^2}} \quad ,
\end{aligned}
$$

also

(4) $$B = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \pm \sqrt{\frac{R_L}{Z_0}}\frac{\sqrt{R_L^2 + X_L^2 - Z_0R_L}}{R_L^2 + X_L^2}$$

Aus Gl. (2) folgt

$$XBR_L - BZ_0X_L = R_L - Z_0 \quad \Leftrightarrow \quad X = \frac{R_L - Z_0 + BZ_0X_l}{BR_L}$$

und weiter

(5) $$X = \frac{1}{B} + \frac{Z_0X_L}{R_L} - \frac{Z_0}{BR_L}$$

Damit B eine reelle Größe ist, darf der Term unter der zweiten Wurzel in Gl. (4) nicht negativ sein, auch für den Fall $X_L = 0$. Also muss gelten

$$R_L^2 + X_L^2 - Z_0R_L > 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_L(R_L - Z_0) + X_L^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad R_L - Z_0 > 0$$

Das heißt, ein L-Netzwerk vom Typ (A) kann nur im Fall $R_L > Z_0$ zur Anpassung verwandt werden.

B2. Netzwerk (B)

Eine zweite Möglichkeit, die Last-Impedanz Z_L an den Leitungswiderstand Z_0 anzupassen, stellt das Netzwerk (B) in Abb. (2) dar. Es gilt wiederum $Z_L = R_L + jX_L$ und es wird wiederum gefordert, dass X und B reellwertige Größen sind (jX und jB also rein imaginäre Impedanzen sind).

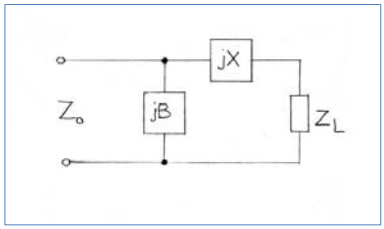

Abbildung 2 Anpassungs-L-Netzwerk (B). Die Rechnung (siehe nachfolgenden Text) ergibt, dass es nur im Fall $R_L < Z_0$ zur Anpassung verwandt werden kann.

Zur Berechnung von B und X gehen wir von der Gleichung

(6) $$\frac{1}{Z_0} = jB + \frac{1}{R_L + jX_L + jX}$$

aus: Die Admittanz der Leitung $1/Z_0$ ist gleich der Summe der Admittanzen des Elements jB und der Serienschaltung des Elements jX und der Last $Z_L = R_L + jX_L$. Wir bringen die rechte Seite auf den Hauptnenner

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{jB(R_L + jX_L + jX) + 1}{R_L + jX_L + jX} = \frac{jB\left[R_L + j(X_L + X)\right] + 1}{R_L + j(X_L + X)} ,$$

und multiplizieren mit dem Produkt der beiden Nenner:

$$R_L + j(X_L + X) = jBZ_0\left[R_L + j(X_L + X)\right] + Z_0$$
$$\Leftrightarrow \quad R_L + j(X_L + X) = Z_0\left\{\left[1 - B(X_L + X)\right]\right\} + jZ_0BR_L$$

Wir setzen wiederum die Real- und Imaginärteile auf beiden Seiten gleich und erhalten

(7) $$R_L = Z_0\left\{\left[1 - B(X_L + X)\right]\right\}$$

(8) $$(X_L + X) = Z_0BR_L .$$

Aus Gl. (8) folgt

$$X = Z_0BR_L - X_L ,$$

das, in Gl. (7) eingesetzt, ergibt

$$R_L = Z_0\left\{\left[1 - B(X_L + Z_0BR_L - X_L)\right]\right\}$$
$$\Leftrightarrow \quad R_L = Z_0 - Z_0^2B^2R_L$$
$$\Leftrightarrow \quad Z_0^2B^2R_L = Z_0 - R_L$$

und schließlich

(9) $$B = \pm\frac{1}{Z_0}\sqrt{\frac{Z_0 - R_L}{R_L}} .$$

Mit $X = Z_0BR_L - X_L$ folgt weiter

(10) $$X = \pm\sqrt{R_L(Z_0 - R_L)} - X_L .$$

Auch hier gibt es eine Einschränkung hinsichtlich der relativen Größe von Z_0 und R_L: Damit B und X reellwertig sind, muss der Term unter der Wurzel positiv sein, also

$$R_L < Z_0$$

Anmerkungen und Literatur

[1] A. Nassiri[1], ANL MIT: *RF Cavities and Components for Accelerators, Impedance Matching*, (im Internet)

8. Messungen an Antennen

8.1 Wie lang ist ein Halbwellen-Dipol?

Eine halbe Wellenlänge lang, wie der Name sagt. Statt »Halbwellen-Dipol« sagt man auch »$\lambda/2$-Dipol«. Mit λ ist die Wellenlänge der Strahlung gemeint, die der (mittengespeiste) Dipol bei Resonanz emittiert. Sie sollte also doppelt so groß wie seine geometrische Länge L:

(1) $$\lambda = 2L \ .$$

Das stimmt nur ungefähr. Wir prüfen nach, wie groß das »ungefähr« ist. Statt der Wellenlänge messen wir die Frequenz der Strahlung. Die Resonanzfrequenz f_r sollte sein

(2) $$f_r = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2L}$$

mit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (Lichtgeschwindigkeit). Die Resonanzfrequenz ist definiert als die Frequenz, bei der sich die Antenne, vom Sender aus gesehen, wie ein rein ohmscher Widerstand verhält. In der komplexen Wechselstromrechnung betrachtet man die Antenne als Impedanz Z, zusammengesetzt aus einem reellen ohmschen Widerstand R (Resistanz) und einer imaginären Reaktanz jX, also

(3) $$Z = R + jX \ .$$

Resonanz bedeutet dann $jX = 0$ und $Z = R$. Wird die gesamte der Antenne zugeführte Energie abgestrahlt, würde die Antenne bei Resonanz wie ein ohmscher Widerstand R wirken, der an Stelle von Strahlung Joulesche Wärme erzeugt.

Die Impedanz lässt sich theoretisch berechnen[1]. Abbildung (1) zeigt den theoretisch berechneten Verlauf der Größen R und X als Funktion der Antennenlänge L. Man sieht, dass die Nullstellen der Reaktanz außer bei $L = \lambda/2$ auch bei den Längen liegen, die ungeradzahlige Vielfache von $\lambda/2$ sind: $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, … usw. Das ist intuitiv klar: Für diese Längen passen dreihalbe, fünfhalbe, … usw. Wellenlängen λ der Stromverteilung in die Dipollänge L hinein.

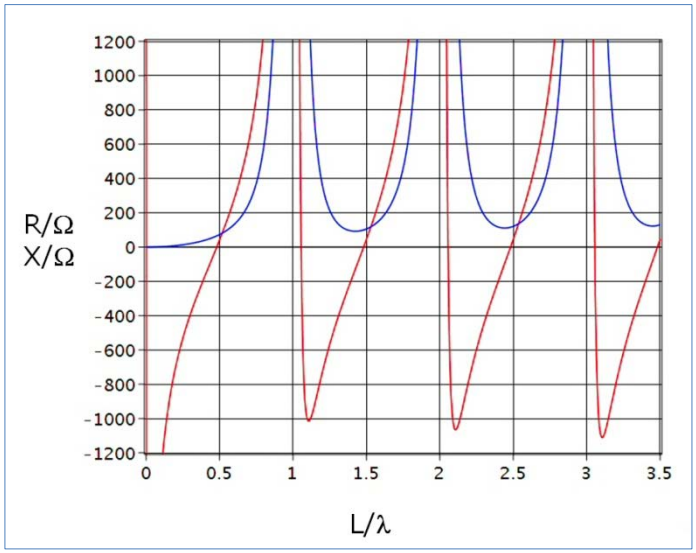

Abbildung 1 Resistanz R (blaue Kurve) und Reaktanz X (rote Kurve) einer Dipolantenne als Funktion der Dipol-Länge L (L in Einheiten der Wellenlänge λ). Theoretische Berechnung nach [1]). Die Nullstellen der Reaktanz jX liegen bei L = $\lambda/2$, $3\lambda/2$, $5\lambda/2$, … usw. Für diese Längen bildet die Stromverteilung auf dem Dipol eine Stehende Welle mit Knoten an den Enden. Das bedeutet, die Antenne schwingt in Resonanz.

Abbildung (2) zeigt nochmals den theoretisch berechneten Verlauf der Größen R und X als Funktion der Antennenlänge L, und zwar in der Umgebung der ersten Nullstelle von jX. Danach ist die Resonanzbedingung ($jX = 0$) der Grundschwingung nicht exakt für $\lambda = 2L$ oder $L/\lambda = 0{,}50$ erfüllt, sondern für $L/\lambda = 0{,}48$. Das heißt, eine Lambda-Halbe-Antenne ist genau genommen um den Faktor $k = 0{,}48/0{,}5 = 0{,}96$ kürzer als $\lambda/2$.

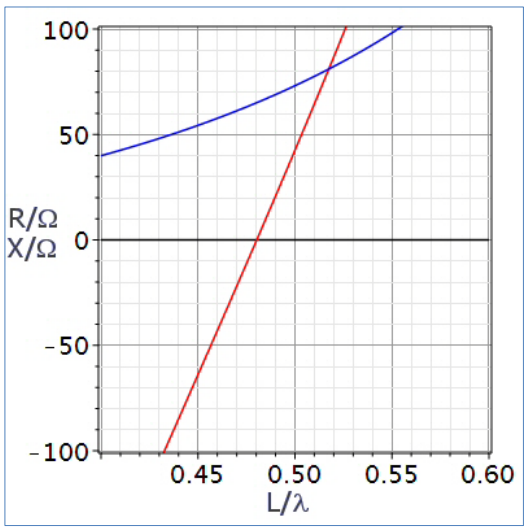

Abbildung 2 Ein Ausschnitt der Kurven von R (blau) und X (rot) in der Umgebung der ersten Nullstelle von jX. Die Resonanzbedingung jX = 0 ist erfüllt für L/λ = 0,48. An dieser Stelle beträgt der Widerstand R etwa 65 Ohm.

Wir versuchen, diesen Faktor $k = 0{,}96$ (»Verkürzungsfaktor[2]«) im Experiment zu bestätigen – messen also die Resonanzfrequenz f_r von Dipolantennen verschiedener Längen L im Bereich von ein bis zwei Metern. Wir erwarten

$$f_r = k\frac{c}{2L} \tag{4}$$

mit $k = 0{,}96$. Zur Messung benutzten wir unseren Antennen-Analysator *FA-VA5*. Der Dipol wurde in einer Höhe von etwa 2,50 m über dem Boden angebracht und über ein etwa 20 m langes Koaxialkabel (*RG*174) an den Ausgang des Analysators angeschlossen. Die Antenne bestand aus zwei gleich langen Aluminium-Stäben mit einem Durchmesser vom 8 mm, die mit Greif-Iso-Schellen (Elektro-Installationsmaterial) auf einer kleinen Holzunterlage befestigt wurden. Die Schellen konnten innerhalb gewisser Grenzen justiert werden, so dass sich die Antennenstäbe in einer Linie ausrichten ließen (Augenmaß). Zwischen ihnen blieb eine Lücke von 5 cm frei. In dieser Lücke wurden das Symmetrier-Element und die Buchse für das Anschlusskabel angebracht. Das Symmetrier-Element war ein Balun[3] mit einem Übersetzungsverhältnis von 1:1. Er bestand aus 3×16 Windungen isoliertem Draht auf einem Ferrit-Ringkern mit 29 mm Außendurchmesser (Abb. 3). Die Kalibrierung des Analysators (Short-Open-Load-Abschluss der Leitung zwischen *FA-VA5* und Antenne) wurde *hinter* dem Balun vorgenommen, also unmittelbar am Einspeisepunkt in den Dipol. Die Dipollänge L, das heißt der Abstand der Enden der Aluminiumstäbe, wurde mit einer Genauigkeit von etwa ±1 cm bestimmt.

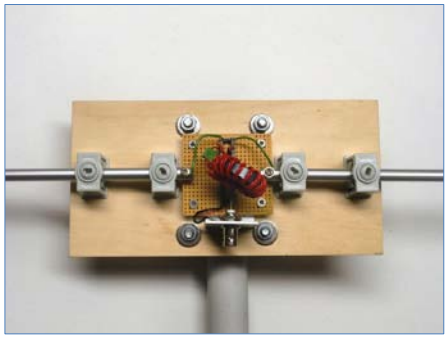

Abbildung 3 Befestigung der Antennenstäbe mit Greif-Iso-Schellen, mit dem Symmetrier-Element (1:1-Balun auf Ferrit-Ringkern mit 3x16 Windungen) und der BNC-Anschlussbuchse.

Das Ergebnis unserer Messung zeigt Tabelle 1. Die Resonanzfrequenz f_r ist nach Gleichung (2) proportional zu $1/L$. Deshalb wurden in Abb. (4) die Werte von f_r als Funktion von $1/L$ aufgetragen. Die Abbildung zeigt die in der Tabelle aufgeführten Messpunkte. Sie liegen wie erwartet auf einer Geraden. Die Steigung der Geraden ist $kc/2 = 140{,}5 \pm 5{,}5$ MHz·m, daraus folgt für den Verkürzungsfaktor

Tabelle 1 Gemessene Resonanzfrequenzen f_r in Abhängigkeit von der Länge L des mittengespeisten Dipols. Als Resonanzfrequenz ist die Frequenz angegeben, bei der der Imaginärteil der Antennenimpedanz jX durch Null geht. R ist der ohmsche Widerstand der Antenne beim Nulldurchgang von jX. Messungen mit dem Antennenanalysator FA-VA5.

L/m	2L/m	f_r/MHz	R/Ohm	$(1/L)/m^{-1}$
1,05	2,1	136,7	65,96	0,95
1,25	2,5	116,9	85,78	0,80
1,50	3,0	100,9	83,44	0,67
1,55	3,1	91,68	72,13	0,65
2,05	4,1	70,87	69,33	0,49
2,40	4,8	62,98	67,23	0,42

$k = 0{,}94 \pm 0{,}04$. Die Fehlergrenzen schließen den theoretischen Wert 0,96 zwar ein, der Messwert deutet aber darauf hin, dass weitere Ursachen die effektive Antennenlänge vermindern. Das könnten Sträucher und Bäume gewesen sein, die sich in der Nähe des Antennenstandorts befanden. Sie wirken als kapazitive Spannungsteiler gegen Erde und verkürzen daher die Antenne.

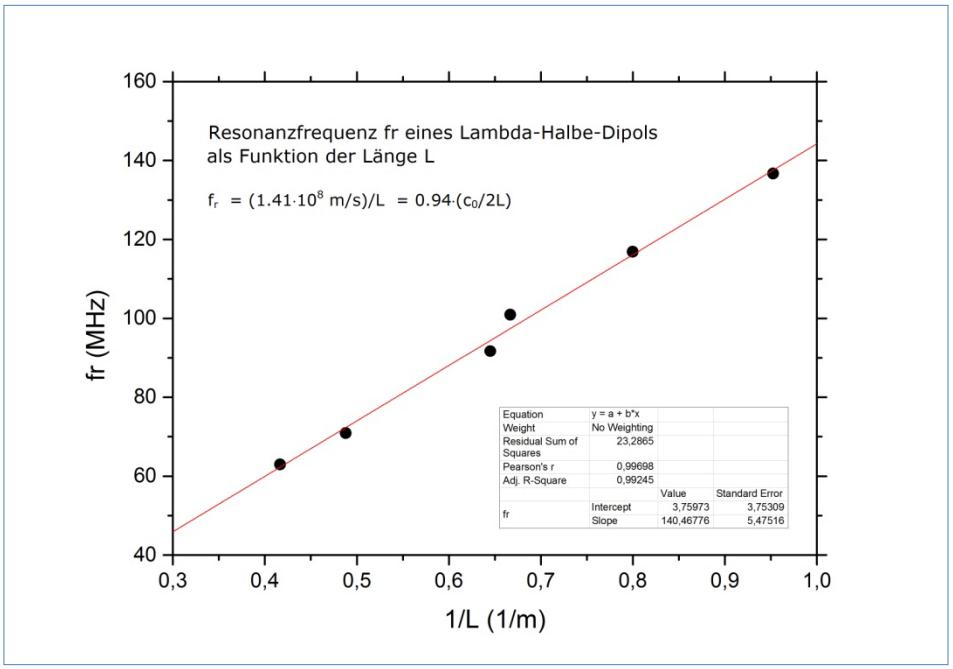

Abbildung 4 Resonanzfrequenz fr eines Lambda-Halbe-Dipols als Funktion der reziproken Länge L. Die Messpunkte folgen der theoretischen Geraden (Gleichung 4). Die Steigung dieser Geraden ist kc/2 mit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s (Lichtgeschwindigkeit). Die Messung ergibt $kc/2 = 1{,}41 \cdot 10^8$ m/s (± 4%), daraus folgt für den Verkürzungsfaktor $k = 0{,}94 \pm 0{,}04$.

Die Werte für den Widerstand R (vierte Spalte in Tabelle 1) zeigen keinen systematischen Gang mit der Länge L. Der Grund ist, dass R von der Höhe h der Antenne über dem Boden abhängt – und zwar von der Höhe h, gemessen in Einheiten der Wellenlänge λ. Im Fall unseres Dipols ($\lambda = 2L$) wäre der Quotient h/L ausschlaggebend. Die Höhe h war bei den Messungen zwar konstant, die Länge L und damit λ jedoch nicht. Daher veränderte sich h/λ von Messpunkt zu Messpunkt. Die Abhängigkeit des Widerstands R vom Verhältnis h/λ soll hier nicht weiter untersucht werden. Sie ist Thema des nächsten Abschnitts 8.2.

8.2 Strahlungswiderstand des Dipols als Funktion der Höhe über dem Boden

Der Fußpunktwiderstand R einer Antenne bei Resonanz ($jX = 0$) ist gleich ihrem Strahlungswiderstand R_s, sofern sie die ihr zugeführte *HF*-Energie vollständig abstrahlt. Setzen wir dies voraus, können wir den ohmschen Anteil R der Antennenimpedanz an der Stelle $jX = 0$ als Strahlungswiderstand R_s

betrachten. Der Strahlungswiderstand ist von der elektrischen Beschaffenheit der Antennenumgebung abhängig – zum Beispiel von der Leitfähigkeit des Bodens, über dem sich die Antenne befindet. Für einen horizontalen $\lambda/2$-Dipol lässt sich R_s nach der Methode der Spiegelladung berechnen: Hat der Dipol die Höhe h über dem Boden, nimmt man einen weiteren, an der Bodenoberfläche gespiegelten Dipol im Innern des Bodens an. Man hat damit zwei parallele, kohärent schwingende Antennen im Abstand $2h$. Deren Strahlungsfeld wird integriert und aus den zeitlichen Mittelwerten die abgestrahlte Energie und der Strahlungswiderstand R_s berechnet – mit h als Parameter. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis einer solchen Rechnung[4]. Die Kurve der R_s-Werte, als Funktion von h aufgetragen, hat Ähnlichkeit mit dem Zeitverlauf einer gedämpften Schwingung.

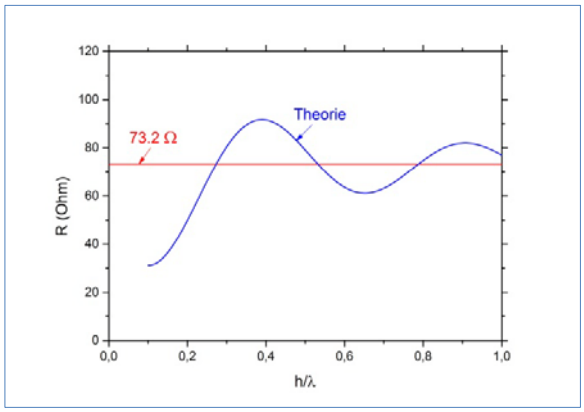

Abbildung 5 Strahlungswiderstand Rs (in der Abbildung mit R bezeichnet) eines Halbwellen-Dipols als Funktion der Höhe h über dem Boden (h in Einheiten der Wellenlänge λ). Blau: theoretische Berechnung nach Charles J. Michaels W7XC: Horizontal Antennas and the Compound Reflection Coefficient, ARRL Antenna Compendium, Vol. 3, Appendix 3: »Calculation of Radiation Resistance of a Thin Antenna«. Rot: Strahlungswiderstand Rs = 73,2 Ohm des Dipols im Freiraum.

Für den Antennen-Analysator ist die Messung des Fußpunktwiderstands R kein Problem. Nehmen wir an, dass der Fußpunktwiderstand gleich dem Strahlungswiderstands R_s ist, sollte es ein Leichtes sein, die Kurve in Abb. (5) mit dem *FA-VA5* experimentell zu bestätigen – ganz so einfach war es dann doch nicht. Für die Messung benutzten wir eine der schon oben genannten Antennen: einen Dipol der

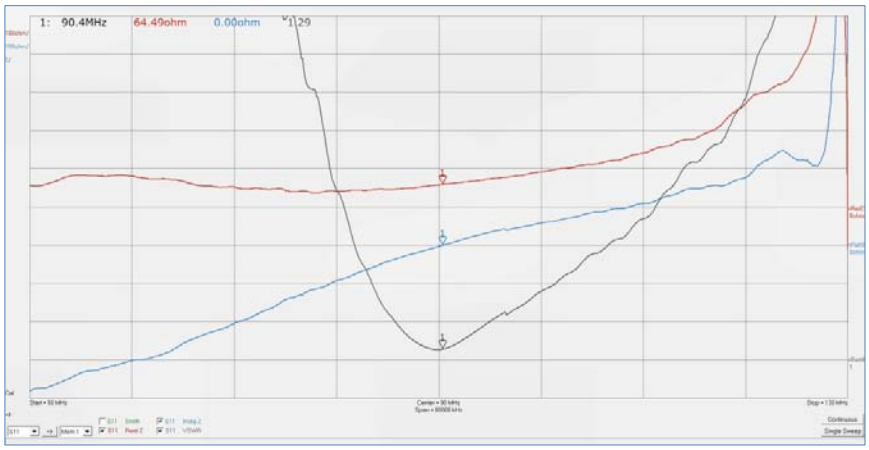

Abbildung 6 Beispiel einer Messung des Reflexionsfaktors an dem im Text beschriebenen Dipol. Rot: Realteil der Antennenimpedanz (Real Z), blau: Imaginärteil der Impedanz (Imag Z), grau: Stehwellenverhältnis (VSWR). Das kleine Dreieck markiert die Stelle der Resonanz (Nulldurchgang des Imaginärteils). Als Resonanzfrequenz liest man ab 90,4 MHz. Die Impedanz bei dieser Frequenz – sie beträgt 64,49 Ω - ist rein ohmsch und gleich dem Fußpunktwiderstand, bei einer verlustfreien Antenne auch gleich dem Strahlungswiderstand Rs. Das Stehwellenverhältnis an der Resonanzstelle ist VSWR = 1,29

Länge L = 1,55 m, für den wir Höhen h/λ zwischen 0,15 und 0,9 realisieren konnten. Der Dipol wurde wie bei dem vorherigen Experiment über ein etwa 20 m langes Koaxialkabel (*RG*174) an den Ausgang

des Analysators angeschlossen. Auch der Balun zwischen Kabelende und Dipolfußpunkt war das schon vorher benutzte Symmetrier-Element (Abb. 3).

Der *FA-VA5* wurde im *USB*-Modus, das heißt softwaregesteuert betrieben. Mit Hilfe der Software[5] ließen sich Real- und Imaginärteil der Antennenimpedanz und das Stehwellenverhältnis *VSWR* als Funktion der Frequenz auf dem Bildschirm eines *PC*s darzustellen. Abbildung 6 zeigt ein Beispiel. Der L = 1,55 m lange Dipol wäre im Idealfall resonant für die Wellenlänge $\lambda = 2L =$ 3,10 m, also bei einer Frequenz von c/λ = 97 MHz. Daher wurde ein Frequenzbereich zwischen 50 MHz und 130 MHz abgetastet.

Tabelle 2 Messung des Fußpunktwiderstands R in Abhängigkeit von der Höhe h über dem Boden. Für eine verlustfreie Antenne ist der Fußpunktwiderstand R gleich dem Strahlungswiderstand Rs. fr = Resonanzfrequenz der Antenne, λ = Wellenlänge

h	f_r	λ	h/λ	R	Fehler(R)
m	MHz	m		Ohm	Ohm
0,5	90,02	3,33259	0,15003	48,72	
0,7	89,85	3,33890	0,20965	59,01	
0,8	93,42	3,21130	0,24912	88,11	± 5,2
1,0	94,30	3,18134	0,31433	109,35	
1,1	93,93	3,19387	0,34441	101,5	
1,1	94,85	3,16289	0,34778	106,21	
1,6	90,13	3,32853	0,48069	90,13	
1,6	94,07	3,18911	0,50171	84,9	
1,9	90,49	3,31528	0,57310	52,12	± 6,73
2,15	93,45	3,21027	0,66972	81,91	
2,25	93,61	3,20479	0,70207	86,87	
2,5	93,70	3,20171	0,78083	95,78	
2,5	93,76	3,19966	0,78133	96,1	
2,5	94,00	3,19149	0,78333	100,44	
2,8	94,07	3,18911	0,87799	88,1	

Gemessen wurde R für Höhen h zwischen 0,5 und 2,8 m. Die Messdaten zeigt Tabelle 2. Bei einigen Höhen h wurde mehrmals gemessen (letzte Spalte der Tabelle). Dabei zeigte sich, dass R mit einer Genauigkeit von der Größenordnung ± 10% angegeben werden kann.

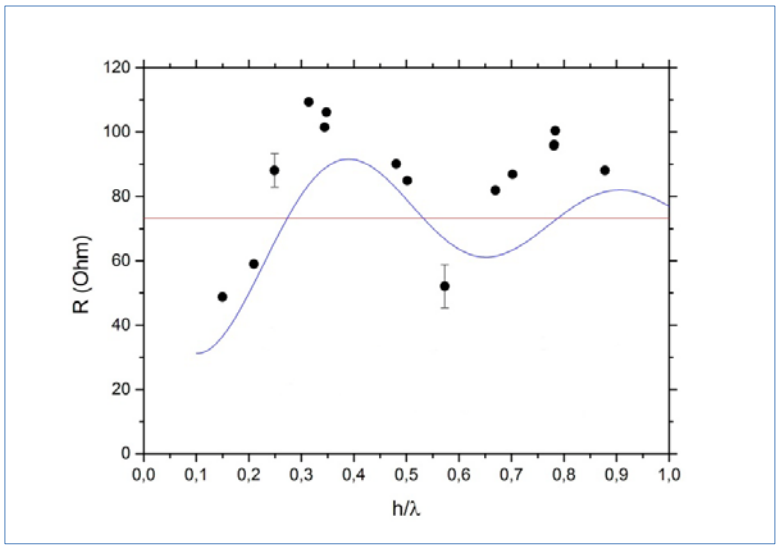

Abbildung 7 Fußpunktwiderstand R des im Text beschriebenen Halbwellen-Dipols als Funktion der Höhe h über dem Boden (h in Einheiten der Wellenlänge λ). Die Messpunkte (schwarze ausgefüllte Kreise) folgen dem Trend nach der theoretischen Kurve (blau) für den Strahlungswiderstand eines Halbwellen-Dipols[4], weichen aber wegen des nicht idealen Standorts der Antenne systematisch von ihr ab. Rot: Strahlungswiderstand Rs = 73,2 Ohm des Dipols im Freiraum.

In Abb. (7) sind die gemessenen Werte des Fußpunktwiderstands R als Funktion der Höhe h aufgetragen (h in Einheiten der Wellenlänge λ). Es zeigt sich, dass die Messpunkte zwar nicht dem

Verlauf, aber immerhin dem Trend der theoretischen Kurve (blau) folgen. Die theoretische Kurve zeigt den Strahlungswiderstand eines verlustfreien Dipols als Funktion von *h*, berechnet nach [4]). Für diesen sind Strahlungswiderstand und Fußpunktwiderstand gleich. Die systematische Abweichung zwischen Theorie und Experiment ist vermutlich auf den nicht idealen Standort der Antenne zurückzuführen.

Anmerkungen und Literatur

[1] Formeln für die Dipol-Impedanz $Z = R + jX$ (R = Resistanz, X = Reaktanz) finden sich z. B. bei
(1) Natalia K. Nikolova, *Notes on Antenna Engineering 2018*, McMaster University, Canada, Gl. (10.40) und (10.41), http://www.ece.mcmaster.ca/faculty/nikolova/antenna_dload/current_lectures/
(2) Constantine A. Balanis, *Antenna Theory – Analysis and Design*, 4th Edition, Wiley (2016), Gl. (4-70) und (4-70a). Für die verlustfreie Antenne ist R gleich dem Strahlungswiderstand. Die Reaktanz X wir nach der so genannten induzierten *EMF*-Methode berechnet. Die Formeln sind

$$R = \frac{Z_0}{2\pi \sin^2(\frac{kL}{2})} \cdot \left\{ C + \ln(kL) - C_i(kL) + \frac{1}{2}\sin(kL)\left[S_i(2kL) - 2S_i(kL)\right] + \frac{1}{2}\cos(kL)\left[C + \ln(\frac{kL}{2}) + C_i(2kL) - 2C_i(kL)\right]\right\}$$

$$X = \frac{Z_0}{2\pi \sin^2(\frac{kL}{2})} \cdot \left\{ S_i(kL) - \frac{1}{2}\cos(kL)\left[S_i(2kL) - 2S_i(kL)\right] + \frac{1}{2}\sin(kL)\left[C_i(2kL) - 2C_i(kL) + C_i(\frac{2ka^2}{L})\right]\right\}$$

Dabei ist Z_0 der Wellenwiderstand des Vakuums

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \mu_0 c = 367{,}73\,\Omega \approx 120\pi\,\Omega$$

und $k = 2\pi/\lambda$ (k heißt auch Wellenzahl, bitte nicht mit dem Verkürzungsfaktor verwechseln). L ist die Länge des Dipols und a der Radius des Antennendrahtes. Mit C ist die Eulersche Konstante C = 0,57721… bezeichnet, schließlich sind S_i und C_i das Sinus- bzw. Kosinus-Integral.

[2] siehe z. B. Moldtrecht *DJ4UF*, *Amateurfunklehrgang*, Lektion *Antennentechnik*. Dort wird der Verkürzungsfaktor mit k bezeichnet: $L = k\lambda/2$ mit k = 0,93 …0,97. Das Verkürzungsfaktor-k bitte nicht mit der Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$ verwechseln. Aus dem Kontext sollte hervorgehen, welches k gemeint ist. In den Formeln für R und X der vorherigen Fußnote[1]) beispielsweise ist k die Wellenzahl.

[3] Balun, gebaut nach einer Anleitung von P. Miles *VK6YSF*: *1:1 Ruthroff voltage balun*. https://vk6ysf.com/balun_1-1.htm

[4] Charles J. Michaels *W7XC*: *Horizontal Antennas and the Compound Reflection Coefficient, ARRL Antenna Compendium*, Vol. 3, Appendix 3: »Calculation of Radiation Resistance of a Thin Antenna«.

[5] Der Vektor-Antennen-Analysator *FA-VA*5 wurde, wie schon mehrfach erwähnt, von *Michael Knitter* (*DG5MK*) entworfen. Die Software zur Anbindung des *FA-VA*5 an einen *PC* und zur Darstellung der Ergebnisse auf dem Bildschirm stammt von *Thomas Baier* (*DG8SAQ*). Eine ausführliche Beschreibung des Geräts in: *Funkamateur* 4/18, S. 322 (2019) und *Funkamateur* 4/18, S. 436 (2019).

9. Serien-RLC-Kreis

9.1 Serien-RLC-Kreis und (Dipol-) Antenne

Eine Dipol-Antenne und ein *RLC*-Serienkreis sind, elektrisch gesehen, ähnliche Gebilde: ihre Impedanzen, als Funktion der Frequenz betrachtet, haben in etwa denselben Verlauf. Im Fall der Antenne gilt das jedenfalls für die Grundschwingung eines in der Mitte gespeisten Halbwellen-Dipols. Abbildungen (1) und (2) zeigen, als Funktion der Frequenz *f*, die Impedanz *Z* von Antenne und *RLC*-Kreis, getrennt nach Real- und Imaginärteil. Wie üblich, schreibt man $Z = R + jX$, es sind also Wirkwiderstand (Resistanz) *R* und Blindwiderstand (Reaktanz) *X* in Abhängigkeit von *f* dargestellt (*R* als blaue, *X* als rote Kurve). Der Frequenzgang wurde mit dem Antennenanalysator *FA-VA5* gemessen[1], der auch den Reflexionsfaktor Γ und das Stehwellenverhältnis *VSWR* bestimmte (beide Größen ebenfalls in Abhängigkeit von der Frequenz). Das Stehwellenverhältnis (schwarze Kurve) zeigt den charakteristischen Verlauf mit einem Minimum in der Nähe der Resonanzfrequenz. Der Reflexionsfaktor ist, wie üblich, als Ortskurve (grün) in einem Smith-Diagramm dargestellt.

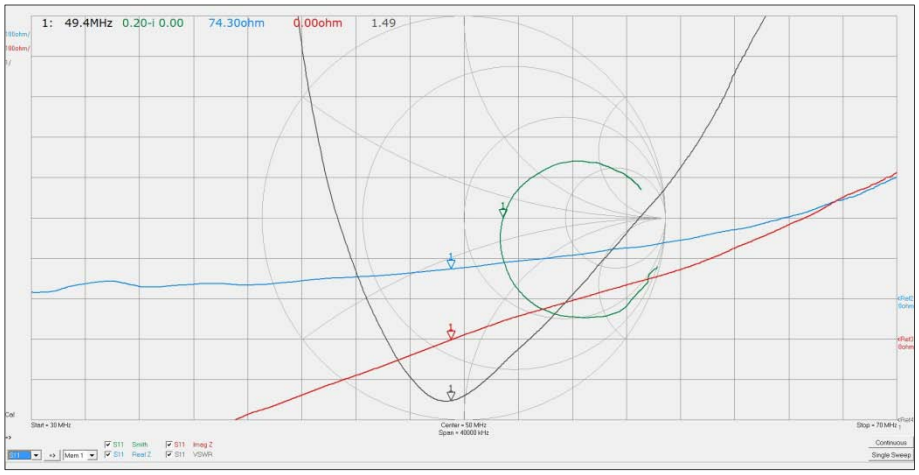

Abbildung 1 Impedanz Z, Reflexionsfaktor Γ (S_{11}) und Stehwellenverhältnis VSWR eines mittengespeisten Halbwellen-Dipols der Länge L_{dipol} = 2,84 m. Blau: Realteil von Z (Wirkwiderstand oder Resistanz R) Rot: Imaginärteil von Z (Blindwiderstand oder Reaktanz X), Grün: Ortskurve des Reflexionsfaktors (Smith-Diagramm), Schwarz: VSWR

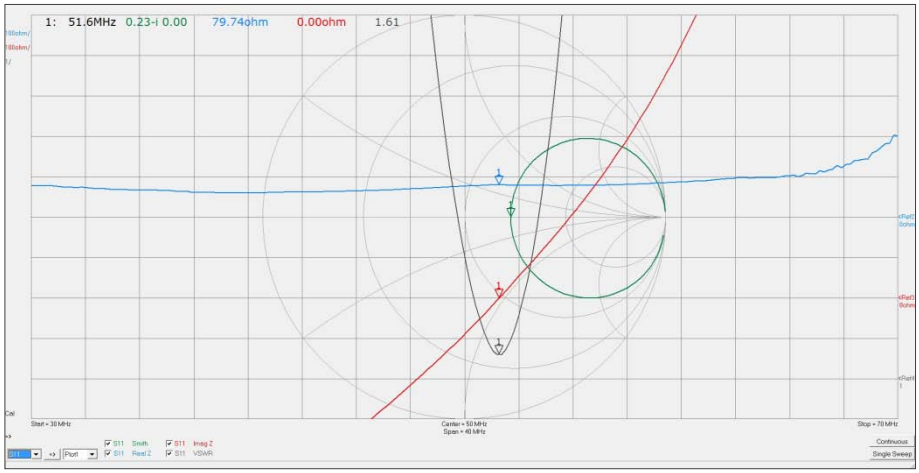

Abbildung 2 Impedanz Z, Reflexionsfaktor Γ (S_{11}) und Stehwellenverhältnis VSWR eines RLC-Serienkreises mit L = 2 µH, C = 5 pF und R = 300 Ω. Blau: Realteil von Z (= Wirkwiderstand oder Resistanz R) Rot: Imaginärteil von Z (= Blindwiderstand oder Reaktanz X), Grün: ortskurve des Reflexionsfaktors (Smith-Diagramm), Schwarz: VSWR.

Dipol und *RLC*-Kreis wurden so dimensioniert, dass ihre Resonanzfrequenzen in etwa übereinstimmten. Ein Vergleich der Abbildungen zeigt, dass Impedanz, Reflexionsfaktor und Stehwellenverhältnis bei grober Betrachtung in der Tat denselben Verlauf haben: Die Kurve des Wirkwiderstands (der Resistanz) *R* ist in beiden Fällen relativ flach, die des Blindwiderstands (der

Reaktanz) X dagegen deutlich steiler. Die Ortskurve des Reflexionsfaktors ist im Fall des *RLC*-Kreises ein fast perfekter Kreis, im Fall des Dipols ein zumindest angedeuteter Kreis. Die *VSWR*-Kurven zeigen, dass die Bandbreite der Antenne größer ist als die des *RLC*-Kreises. Dieser Unterschied ist aber nicht unbedingt typisch für die beiden Gebilde.

Der Serien-*RLC*-Kreis ist ein zwar einfaches, aber grobes Modell für eine Dipolantenne. Details kann man ihm nicht entnehmen. Das Modell taugt auch nicht für andere Antennenformen. Eine umfassende Übersicht über Stromkreise mit passiven Bauteilen, die das Verhalten von Antennenimpedanzen simulieren, enthält die Arbeit[2] von *S. Stearns* (*K6OIK*) »Universal Equivalent Circuits for all Antennas«.

9.2 R=konstant-Ortskurve des Reflexionsfaktors im Smith-Diagramm

Wir wollen die Ortskurve des Reflexionsfaktors im Fall des *RLC*-Kreises etwas näher betrachten. Eine Ortskurve im Smith-Diagramm ist die Spur, die der Reflexionsfaktor im Diagramm hinterlässt, wenn man die Frequenz f über einen großen Bereich kontinuierlich verändert – in der Regel in aufsteigender Richtung. Die Ortskurve für konstantes R ist ein (geometrischer) Kreis mit dem Mittelpunkt auf der reellen Achse. Sie beginnt in der Nähe des Leerlaufpunkts $\Gamma = 1 + j0$ und bewegt sich mit steigender Frequenz zunächst in der unteren Hälfte des Diagramms. Der *RLC*-Kreis verhält sich hier wie eine Kapazität: der Imaginärteil Im(Z) der Impedanz ist negativ. Die Ortskurve durchstößt die reelle Achse bei der Frequenz, für die der Imaginärteil Im(Z) verschwindet. Das ist definitionsgemäß die Resonanzfrequenz f_0. Der Wert des Realteils Re(Z) an dieser Stelle ist der effektive ohmsche Widerstand des Kreises. Für Frequenzen größer als f_0 bewegt sich die Ortskurve in der oberen Hälfte des Diagramms. Hier ist der Imaginärteil Im(Z) positiv. Das heißt, der *RLC*-Kreis verhält sich wie eine Induktivität.

Abbildung 2 zeigt, dass die Ortskurve des Reflexionsfaktors für konstantes R im Fall des *RLC*-Kreises in der Tat den von der Theorie geforderten (geometrischen) Kreis bildet. Das soll nochmals durch eine Messung bestätigt werden. Wir benutzen dazu wir einen *RLC*-Kreis mit L = 2,5 µH und C = 14,9 pF mit der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 26{,}1 \text{ MHz} .$$

Der konstante Widerstand R wird durch den Kupferwiderstand der Spule dargestellt. Er beträgt R = 3,0 Ω. Zur Messung wird wiederum der Antennenanalysator *FA-VA5* verwendet. Abbildung 3 zeigt ein

Abbildung 3 Messanordnung

Foto der Anordnung. Der Reflexionsfaktor wird für einige Frequenzen zwischen 15 und 40 MHz gemessen. Aus dem Reflexionsfaktor berechnet der *FA-VA5* eine ganze Reihe anderer Kenngrößen, unter anderem die Impedanz *Z*, getrennt nach Real- und Imaginärteil, Re(*Z*) bzw. Im(*Z*). In Tabelle 1 sind Re(*Z*) und Im(*Z*) und die entsprechenden normierten Werte, Re(Z/Z_0) bzw. Im(Z/Z_0) aufgeführt. Die Bezugsimpedanz ist Z_0 = 50 Ω.

Tabelle 1 Impedanz eines Serien-RLC-Kreises mit L = 2,5 µH, C = 14,9 pF und R = 3,0 Ω als Funktion der Frequenz f. Impedanz Z getrennt nach Real- und Imaginärteil, Re(Z) bzw. Im(Z). Re(Z/Z_0) und Im(Z/Z_0) normierte Werte, Z_0 = 50 Ω.

f	Re(Z)	Re(Z/Z_0)	Im(Z)	Im(Z/Z_0)
MHz	Ohm		Ohm	
15.74	6.54	0.1308	-431.30	-8.6260
23.21	5.46	0.1092	-103.47	-2.0694
24.87	4.37	0.0874	-44.51	-0.8902
25.72	3.41	0.0682	-15.88	-0.3176
26.21	3.03	0.0606	0	0
26.63	2.73	0.0546	13.49	0.2698
27.32	2.46	0.0492	35.40	0.7080
29.07	1.97	0.0394	91.11	1.8222
41.26	-13.70	-0.2740	497.52	9.9504

Abbildung 4 zeigt die Messwerte der Tabelle 1, aufgetragen als Punkte im Smith-Diagramm. Das Smith-Diagramm ist bekanntlich eine Darstellung des Reflexionsfaktors Γ in der komplexen Ebene (*Gaußsche Zahlenebene*: Re(Γ) in *x*-Richtung, Im(Γ) in *y*-Richtung), das Koordinatennetz des Smith-Diagramms andererseits ist ein System aus Linien konstanten Real- und Imaginärteils der normierten Impedanz – also aus Linien mit Re(Z/Z_0) = konstant und Im(Z/Z_0) = konstant. Das heißt, die Punkte in der Abbildung liegen exakt an den Schnittpunkten der Linien mit den Werten in den Spalten 3 und 5 der Tabelle. Sie liegen in guter Näherung auf dem theoretisch für *R* = 3,0 Ω berechneten Kreis (roter Kreis in der Abbildung).

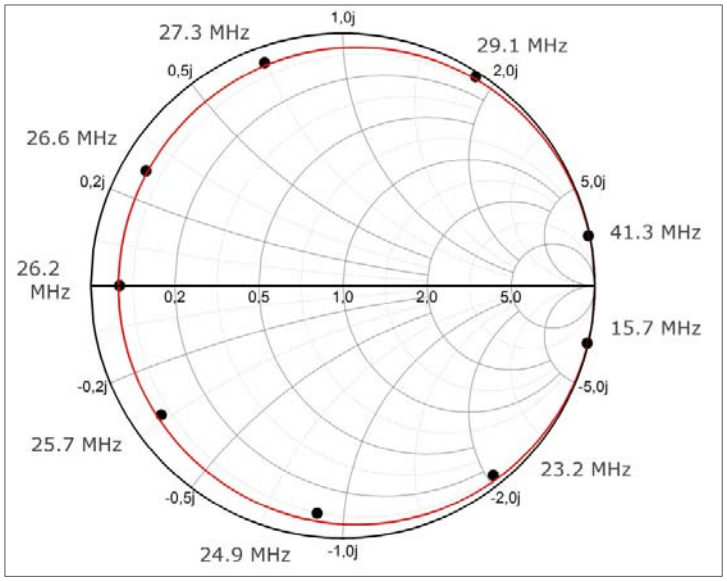

Abbildung 4 Smith-Diagramm der Impedanz eines RLC-Serienkreises: Ortskurve des Reflexionsfaktors für konstantes R. Messpunkte: Daten aus Tabelle 1. Rot: Theoretisch berechnete Ortskurve für R = 3,0 Ω. Die Ortskurve beginnt im Leerlaufpunkt (rechtes Ende der reellen Achse) und bildet einen (geometrischen) Kreis, der mit steigender Frequenz im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Die reelle Achse wird bei der Resonanzfrequenz f_0 = 26,2 MHz durchstoßen. Unterhalb von f_0 verhält sich der RLC-Kreis wie eine Kapazität (Im(Z) < 0), oberhalb von f_0 wie eine Induktivität (Im(Z) > 0).

An den Punkten sind die zugehörenden Frequenzen (erste Spalte der Tabelle) notiert. Sie zeigen, dass der Kreis für konstantes *R* mit steigender Frequenz im Uhrzeigersinn durchlaufen wird – wie erwartet.

Der am weitesten links liegende Punkt mit f = 26,21 MHz entspricht der Resonanzfrequenz. Für die Punkte unterhalb der Resonanzfrequenz ist der Imaginärteil von Z negativ (Spalten 4 oder 5 der Tabelle), für die Punkte oberhalb der Resonanzfrequenz ist er positiv. Auch das ist keine Überraschung. Die Vorhersage der Theorie wird bestätigt.

9.3 Bandbreite und Q-Wert des Serien-RLC-Kreises

Der *RLC*-Serienkreis wurde in den Anfangsjahren der Rundfunktechnik vielfach dazu benutzt, die Signalstärke von *HF*-Sendern abzuschwächen. Das war nötig, wenn man Sender empfangen wollte, deren Signal von einem anderen, starken Sender »zugedeckt« wurde. Man stimmte den *RLC*-Kreis auf die Frequenz des starken Senders ab und schaltete den Kreis parallel zu den Eingangsklemmen »Antenne« und »Erde« des Empfängers. Der *RLC*-Kreis leitete – wegen des geringen Wechselstromwiderstands für die Frequenz des starken Senders – dessen Signale zur Erde ab. Sie wurden sozusagen aus dem Frequenzgemisch, das von der Antenne in den Empfänger eindrang, herausgesaugt (»Saugkreis«).

Der *RLC*-Kreis filtert bekanntlich nicht nur eine einzige Frequenz heraus, sondern auch Frequenzen, die sich innerhalb einer Umgebung unterhalb und oberhalb der Resonanzfrequenz befinden. Ein Maß für diese Umgebung ist die *Bandbreite* des Kreises. Wir definieren zunächst die Größe »Bandbreite« und wollen dann untersuchen, von welchen Parametern sie abhängt.

Für die folgenden Überlegungen gehen wir aus von der komplexen Impedanz $\underline{Z}$ des *RLC*-Serienkreises. Sie ist gegeben durch

(1) $$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \quad .$$

Dabei ist j die imaginäre Einheit, und R, L und C bezeichnen den ohmschen Widerstand, die Induktivität der Spule bzw. die Kapazität des Kondensators. Resonanz bedeutet, dass $\underline{Z}$ rein reell (und damit gleich R) wird. Die Resonanzfrequenz f_0 (meist rechnet man mit der Kreisfrequenz $\omega_0 = 2\pi f_0$) folgt also aus der Bedingung

(2) $$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \ .$$

Die ergibt

(3) $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{bzw.} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \ .$$

Die Bandbreite Δf ($\Delta\omega$) des Kreises ist definiert als die Differenz der (Kreis-)Frequenzen, für die Real- und Imaginärteil von $\underline{Z}$ dem Betrag nach gleich sind. Die beiden Frequenzen liegen symmetrisch zur Resonanzfrequenz f_0, die eine oberhalb, die andere unterhalb von f_0. Für sie gilt also

(4) $$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = R \qquad \text{oder} \qquad \omega L - \frac{1}{\omega C} = \pm R \quad .$$

Multiplikation mit ωC ergibt

(5) $$\begin{aligned} \omega^2 LC \mp \omega RC - 1 &= 0 \\ \omega^2 \mp \frac{R}{L}\omega - \omega_0^2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\omega_1 = +\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \quad \text{und} \quad \omega_2 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_0^2} \ ,$$

wobei ω_1 dem negativem und ω_2 dem positiven Vorzeichen von R/L in Gl. (5) entspricht. Damit folgt

(6) $$\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \frac{R}{L}.$$

Die Bandbreite $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ des Kreises ist also proportional zum ohmschen Widerstand R und umgekehrt proportional zur Induktivität L der Spule. Die Kapazität C des Kondensators geht nicht in Δf bzw. $\Delta\omega$ ein. Statt der Bandbreite betrachtet man oft die Güte oder der »Q-Wert«

(7) $$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

des Kreises. Das ist das Verhältnis der Resonanzfrequenz zur Bandbreite. Aus Gl. (6) folgt

(8) $$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Danach sollte der Q-Wert bei konstanter Resonanzfrequenz umgekehrt proportional zu R sein.

9.4 Bandbreite des Serien-RLC-Kreises im Smith-Diagramm

Wir untersuchen, wie sich Bandbreite Δf ($\Delta\omega$) und Q-Wert eines Serien-RLC-Kreises im Smith-Diagramm bemerkbar machen. Um die Bandbreite abzulesen, suchen wir auf der Ortskurve des Reflexionsfaktors die Punkte, für die der Realteil Re(Z) der Impedanz betragsmäßig gleich dem Imaginärteil Im(Z) ist (siehe Gl. (4)). Diese Punkte liegen auf den Kreisen mit dem Mittelpunkten $(0, -j)$ und $(0, +j)$ und dem Radius $\sqrt{2}$. Die Schnittpunkte der Kreise definieren die Frequenzen $f_1 = \omega_1/2\pi$ bzw. $f_2 = \omega_2/2\pi$ in Gl. (6). Abbildung 5 stellt den Sachverhalt dar. Skizziert sind drei

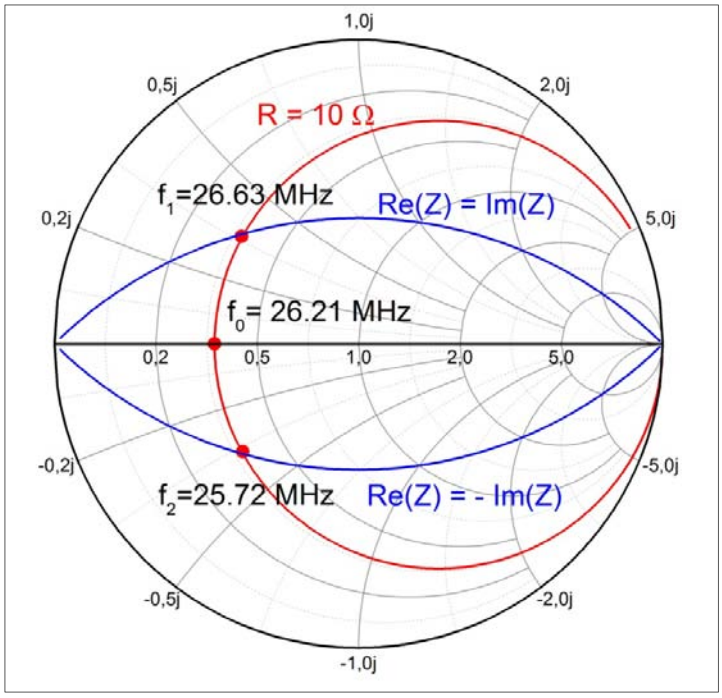

Abbildung 5 Ortskurve des Reflexionsfaktors (rot) für einen Serien-RLC-Kreis mit R = 10 Ω und die beiden Kurven (blau), die der Bedingung Re(Z) = ± Im(Z) entsprechen. Die Schnittpunkte der Kurven definieren die Frequenzen f_1 bzw. f_2 nach Gl. (6), hier f_1 = 26,62 MHz und f_2 = 25,72 MHz. Als Bandbreite folgt $\Delta f = f_1 - f_2$ = 0,91 MHz. Der Punkt der Ortskurve (rot) auf der reellen Achse (schwarz) entspricht der Resonanzfrequenz f_0, hier f_0 = 26,21 MHz. Damit ist der Q-Wert Q = $f_0/\Delta f$, also Q = 26,21/0,91 = 28,8.

Kurven: die Ortskurve des Reflexionsfaktors (rot) für einen RLC-Kreis mit $R = 10\ \Omega$, und die beiden Kurven (blau) für Re(Z) = ± Im(Z). Die Schnittpunkte der Kurven definieren die Frequenzen f_1 bzw. f_2 nach Gl. (6). Als Bandbreite folgt $\Delta f = f_1 - f_2$. Der Schnittpunkt der Ortskurve (rot) mit der reellen

Achse entspricht der Resonanzfrequenz f_0. Der Q-Wert ist $Q = f_0/\Delta f$. Die Zahlen in Abb. (5) sind f_1 = 26,26 MHz, f_2 = 25,72 MHz und f_0 = 26,21 MHz. Damit ist Δf = 0,91 MHz und Q = 28,8.

9.5 Bandbreite und Q-Wert in Abhängigkeit vom Widerstand R des Serien-RLC-Kreises

Ob ein *RLC*-Kreis schmal- oder breitbandig ist, hängt von seinen ohmschen Verlusten ab. Je größer der Widerstand, desto höher sind die ohmschen Verluste und desto breiter ist die Resonanzkurve – anders ausgedrückt, desto kleiner ist der Q-Wert des Kreises. Also sollten Q-Wert und Widerstand R sich gegenläufig verhalten. Gleichung (8) besagt, dass beide Größen sogar umgekehrt proportional zueinander sind. Es war

$$(8) \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Wir wollen diesen Zusammenhang zwischen R und Q-Wert in einem kleinen Experiment bestätigen. Dazu benutzen wir einen Serienkreis mit L = 2,5 µH und C = 14,9 pF und wählen als Widerstand R einige Werte zwischen 0 Ω und 200 Ω. Das heißt, Induktivität L und Kapazität C bleiben konstant, variiert wird nur R. Gemessen werden Real- und Imaginärteil der Impedanz, Re(Z) und Im(Z), und zwar (a) bei der Resonanzfrequenz f_0 und (b) bei den oberhalb und unterhalb von f_0 liegenden

Tabelle 2 Messdaten – Impedanz Z (und weitere Größen wie z. B. die Güte Q) eines RLC-Serienkreises mit L = 2,5 µH und C = 14,9 pF für verschiedene Werte von R. Z_0 = 50 Ohm. Nähere Erläuterungen im Text.

R	f_0, f_1, f_2	Re(Z)	Re(Z/Z_0)	Im(Z)	Im(Z/Z_0)	VSWR	Δf	Q	ΔVSWR
Ohm	MHz	Ohm		Ohm			MHz		
0	26,05	4,76	0,0952	0	0	10,54	0,21	124,0	0,07
0	26,15	4,65	0,0930	4,42	0,0884	10,84			
0	25,94	4,88	0,0976	-4,79	-0,0958	10,38			
5	26,16	11,36	0,2272	0	0	4,40	0,57	45,9	0,24
5	26,44	11,31	0,2262	11,17	0,2234	4,66			
5	25,87	11,42	0,2284	-11,32	-0,2264	4,62			
10	26,12	17,88	0,3576	0	0	2,81	0,89	29,3	0,38
10	26,56	17,81	0,3562	17,31	0,3462	3,20			
10	25,67	17,93	0,3586	-17,46	-0,3492	3,18			
18	26,10	28,32	0,5664	0	0	1,77	1,46	17,9	0,75
18	26,84	28,37	0,5674	28,93	0,5786	2,53			
18	25,38	28,30	0,5660	-28,43	-0,5686	2,51			
36	26,22	51,12	1,0224	0	0	1,06	2,62	10,0	1,61
36	27,55	51,85	1,0370	51,97	1,0394	2,67			
36	24,93	50,75	1,0150	-51,16	-1,0232	2,66			
50	26,20	69,50	1,3900	0	0	1,39	3,57	7,34	1,80
50	28,04	71,37	1,4274	71,00	1,42	3,23			
50	24,47	68,70	1,3740	-68,32	-1,3664	3,14			
68	26,38	91,73	1,8346	0	0	1,84	4,78	5,52	2,19
68	28,86	95,91	1,9182	96,04	1,9208	4,12			
68	24,08	90,35	1,8070	-90,97	-1,8194	3,94			
100	26,49	132,75	2,655	0	0	2,66	6,96	3,81	2,97
100	30,19	143,91	2,878	142,49	2,8498	5,88			
100	23,23	129,35	2,587	-129,31	-2,5862	5,37			
200	27,09	254,20	5,084	0	0	5,08	9,15	2,96	6,40
200	30,08	327,02	6,540	327,58	6,5516	13,18			
200	20,93	241,18	4,823	-241,54	-4,8308	9,77			

Frequenzen f_1 und f_2, für die Real- und Imaginärteil von Z betragsmäßig gleich sind. Die Messung erfolgt wiederum mit dem *FA-VA5*. Das Ergebnis zeigt Tabelle 2. Neben Re(Z) und Im(Z) sind auch die normierten Werte Re(Z/Z_0) und Im(Z/Z_0) aufgeführt (Z_0 = 50 Ω). Außerdem ist das vom *FA-VA5* ermittelte Stehwellenverhältnis *VSWR* in die Tabelle aufgenommen worden. Schließlich werden Bandbreite $\Delta f = f_1 - f_2$ und der daraus folgende Q-Wert gelistet.

Zu den Daten der Tabelle ist anzumerken: (1) Nach Gl. (3) folgt aus L = 2,5 µH und C = 14,9 pF als Resonanzfrequenz des Kreises f_0 = 26,1 MHz. Die Messwerte (Tabelle Spalte 2, f_0 ist der Wert in der jeweils ersten der drei pro Widerstandswert aufgeführten Zeilen) stimmen in etwa (innerhalb ± 2%, außer im Fall R = 200 Ω) mit dem theoretischen Wert überein. (2) bei den Werten von R in Spalte 1 handelt es sich um den Wert des externen, als Bauteil des Kreises eingesetzten Widerstands. Der effektive, im *RLC*-Kreis wirksame Wert R_{eff} ist der in Spalte 1 der Tabelle aufgeführte Wert von R, vergrößert um den Kupferwiderstand R_{spule} = 3,05 Ω der Spule: $R_{\text{eff}} = R + R_{\text{spule}}$.

Da wir Gl. (8) verifizieren wollen, tragen wir Q aus der vorletzten Spalte der Tabelle 2 als Funktion von $1/R_{\text{eff}}$ in einem Koordinatensystem auf. Das Ergebnis zeigt Abbildung 6.

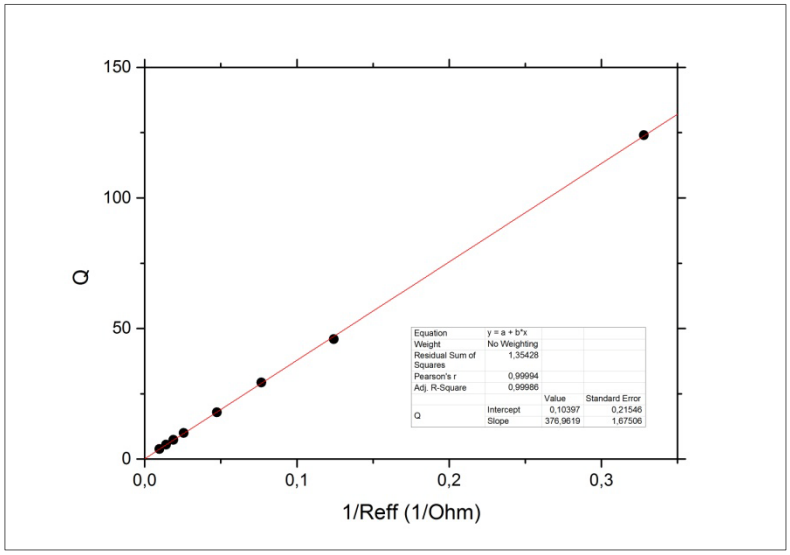

Abbildung 6 Q-Wert des RLC-Kreises (vorletzte Spalte der Tabelle 2) als Funktion von $1/R_{\text{eff}}$. Dabei ist R_{eff} der effektive Wert des im Kreis wirksamen Widerstands, also der um den Kupferwiderstand der Spule vergrößerte Wert R aus Spalte 1 der Tabelle: $R_{\text{eff}} = R + R_{\text{spule}}$. Kupferwiderstand der Spule R_{spule} = 3,05 Ω.

Abbildung (6) zeigt, dass die Messpunkte des Q-Werts sich tatsächlich umgekehrt proportional zum effektiven Widerstand R_{eff} des *RLC*-Kreises verhalten: Die Ausgleichsgerade durch die Punkte geht innerhalb des (statistischen) Fehlers durch den Nullpunkt. Anzumerken ist allerdings, dass der Messpunkt für R = 200 Ω im Graphen nicht berücksichtigt ist. Der Grund: Das Intervall der Bandbreite Δf liegt für diesen Punkt nicht symmetrisch zur Resonanzfrequenz – ein Hinweis auf einen systematischen Fehler, den wir nicht weiter untersuchen wollen.

Die Steigung der Ausgleichsgerade sollte nach Gl. (8) mit L = 2,5 µH und C = 14,9 pF den Zahlenwert

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = \sqrt{\frac{2{,}5\,\mu\text{H}}{14{,}9\,\text{pF}}} = 409{,}6\ \Omega$$

ergeben. Der Wert der besten Anpassung hingegen ist 377 ± 2 Ω. Der Unterschied deutet darauf hin, dass die hier benutzten Werte für L und C nicht den bei 26 MHz effektiv wirksamen entsprechen.

Wir schließen damit trotz der offenen Fragen das Experiment ab. Es sollte an einem einfachen Beispiel (*RLC*-Serienkreis) grundlegende Anwendungen einer Reflektometer-Messung demonstrieren und die Vorteile des Smith-Diagramms herausstellen.

Anmerkungen

[1] Michael Knitter: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (1)*, Funkamateur **67** (2018), S. 322 und: *Vektorieller Antennenanalysator FA-VA5 für 10 kHz bis 600 MHz (2)*, Funkamateur **67** (2018), S. 436

[2] Steve Stearns (*K6OIK*) : *Universal Equivalent Circuits for all Antennas*, https://www.fars.k6ya.org/docs/k6oik

10. Q-Wert eines Parallel-RLC-Kreises durch Messung des Reflexionsfaktors Γ

1. RLC-Kreis als Ersatzschaltbild für HF-Resonator (RF-Cavity)

Es geht wieder einmal um den *Q*-Wert eines Schwingkreises aus Spule und Kondensator. In diesem Fall ist es ein *Parallelkreis*. Die Spule habe die Induktivität *L*, der Kondensator die Kapazität *C*. Im Ersatzschalbild fügen wir noch einen Widerstand hinzu, der einen weiteren Zweig parallel zu Spule und Kondensator bildet. Den Widerstand bezeichnen wir mit *R*, er fasst die Verluste des Kreises zusammen, die durch das Kupfer der Spule und die Ankopplung an die Messgeräte zustande kommen. Der komplexe (Wechselstrom-)Widerstand oder die Impedanz *Z* des Kreises ist damit gegeben durch

$$(1) \qquad Z = R + jX = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} .$$

Die Größe *Y*, der Kehrwert von *Z*, heißt komplexer Leitwert oder Admittanz des Kreises. Sein Realteil *G*, die Konduktanz, ist der Kehrwert von *R*. Bei theoretischen Überlegungen zum Parallelkreis ist es in der Regel bequemer, mit $G = 1/R$ an Stelle von *R* zu rechnen. Der Imaginärteil jB von *Y* (die Suszeptanz) hat wie der Imaginärteil jX von *Z* (die Reaktanz) bei Resonanz den Wert Null.

Die Aufgabe lautet, den Gütefaktor *Q* dieses *RLC*-Parallelkreises durch eine Reflexionsmessung zu bestimmen. Ich benutze dazu meinen kürzlich erstandenen Vektor-Antennen-Analysator[1] *FA-VA*5 – also ein Gerät, das eine elektromagnetische Welle über ein Kabel dem zu untersuchenden Bauteil zuführt und ermittelt, welcher Anteil der Welle vom Bauteil zurückgeworfen wird. Die vom Analysator gemessene Größe ist eine komplexe Zahl, genannt Reflexionsfaktor Γ, und wird nach Betrag und Phase ermittelt. (Der Reflexionsfaktor Γ wird vielfach auch mit S_{11} bezeichnet, da er identisch ist mit dem 11-Element der *S*-Matrix[2]). Für den Reflexionsfaktor einer Leitung der Impedanz Z_0, die mit einer Last der Impedanz *Z* abgeschlossen ist, gilt

$$(2) \qquad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} .$$

Die Last ist in unserem Fall der *RLC*-Kreis, *Z* ist also durch Gleichung (1) gegeben. Die Impedanz Z_0 ist in der Regel der Wellenwiderstand des *HF*-Kabels, also $Z_0 = 50\ \Omega$. Zum Verständnis des Messverfahrens sind einige grundlegende Kenntnisse der Hochfrequenz (*HF*)-Technik[2] erforderlich. Meist wird Γ in Abhängigkeit von der Frequenz *f* gemessen und als Ortskurve in der komplexen Zahlenebene dargestellt, mit *f* als Parameter. Diese Darstellung, genannt Smith-Diagramm[3,4], ist in der *HF*-Technik üblich.

Die Idee zu dieser Messung kam mir, als ich die Anleitung zu einem Experiment des Physik-Praktikums an der *TU* Darmstadt[5] las. Dort sollte mit Hilfe des Reflexionsverfahrens der *Q*-Wert eines *HF*-Hohlraumresonators (*HF*-Cavity) bestimmt werden. Das Institut für Kernphysik der *TU* Darmstadt benutzt solche Resonatoren an seinem Elektronenbeschleuniger *S-DALINAC*. In jungen Jahren habe ich selber längere Zeit an diesem Institut (und dem Vorgänger-Beschleuniger *DALINAC*) gearbeitet. Es freut mich, in dieser Sache noch einmal an meine ehemalige Arbeitsstätte erinnert zu werden.

Wie man in der Praxis den *Q*-Wert eines Beschleuniger-Resonators bestimmt, wird in einem Vortrag einer Gruppe von Physiker*innen[6] am *CERN* (*Antonio G.*, *Markus J.*, *Hélène G. und Alex S.*) ausführlich und anschaulich beschrieben[7]. *HF*-Resonatoren von Beschleunigern arbeiten im GHz-Bereich. Das dafür erforderliche Equipment – ein professioneller Vektor-Network-Analyser (*VNA*) – ist etwas hochwertiger als der *FA-VA5*. Für ein Hobby-Experiment an einem *RLC*-Kreis ist mein Kurzwellen/*UKW*-Gerät (0,01 ... 600 MHz) aber völlig ausreichend.

In der Literatur[3] wird der *RLC*-Parallelkreis als *Ersatzschaltbild* für den Beschleuniger-Resonator betrachtet. Was als Ersatzschaltbild taugt, sollte sich auch in der Realität bewähren. Die Frage (siehe oben) ist also: Kann man den Gütefaktor Q eines solchen *RLC*-Kreises durch eine Reflexionsmessung bestimmen? Es sieht so aus, als ob dies in der Tat möglich ist – auch wenn die Q-Werte von Resonator und *RLC*-Kreis sich um Größenordnungen unterscheiden. Ein Beschleuniger-Resonator hat, soweit mir bekannt, typischerweise $Q = 5000$, mein *RLC*-Kreis bringt es auf knapp über $Q = 100$. Ein Problem ist jedoch in beiden Fällen gleich: Der Innenwiderstand des Antennen-Analysators und der Wellenwiderstand des Anschlusskabels sind niederohmig ($Z_0 = 50\ \Omega$), Resonator und *RLC*-Kreis dagegen hochohmig. Die Anpassung der Impedanz erfolgt beim Resonator durch die geometrische Konstruktion der Koppelschleife, mit der die *HF*-Welle in den Resonator eingekoppelt wird. Im Ersatzschaltbild wird der Koppler durch einen (*HF*-)Transformator ersetzt, also zwei auf einem gemeinsamen Ringkern aufgebrachte Wicklungen Kupferdraht (Primär- und Sekundärwicklung). Obwohl der vom Antennen-Analysator gemessene Q-Wert des *RLC*-Kreises von der Anpassung unabhängig ist[3], habe ich meine Schaltung mit einem derartigen Transformator versehen. Dadurch kann ich den Kopplungsgrad variieren.

2. Experiment

Diesen *HF*-Transformator zu wickeln war dann auch einer der Punkte des Experiments, die Vorüberlegungen erforderten. Der Kopplungsfaktor ist beim Transformator durch das Verhältnis der Windungszahlen von Primär- und Sekundärwicklungen gegeben: Verhalten sich die Windungszahlen wie $\ddot{u} = 1/n$, transformieren sich die Impedanzen im Verhältnis $\ddot{u}^2 = 1/n^2$. Die Impedanz des *RLC*-Kreises schätze ich zu größenordnungsmäßig 50 kΩ (bei Resonanz), der Innenwiderstand des Antennen-Analysators und der Wellenwiderstand des Anschlusskabels (Koaxialkabel) haben den üblichen Wert 50 Ω. Dazwischen liegt ein Faktor 1000, die Windungszahlen sollten sich daher in etwa wie 1: 32 verhalten ($1{:}\ 32^2 \approx 1{:}\ 1000$). Der genaue, jeweils gewünschte Wert wurde nach der Methode Versuch und Irrtum (*trial and error*) ermittelt – und erforderte ein wenig Geduld.

Nach diesen Vorüberlegungen zum Experiment: Abbildung 1 zeigt das Stromlaufdiagramm meiner Messanordnung. Mein *RLC*-Schwingkreis besteht aus einer Luftspule mit der Induktivität $L = 10\ \mu H$ (21 Windungen *Cu*-Lackdraht, gewickelt auf einen zylindrischen Spulenkörper von 3,2 cm Durchmesser) und einem Keramik-Kondensator der Kapazität $C = 330$ pF. Nach der Thomsonschen

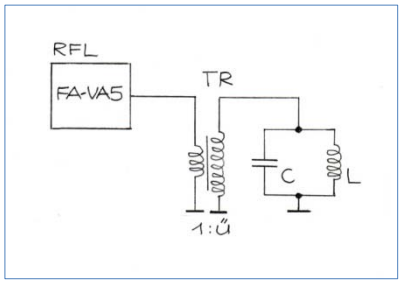

Abbildung 1 Stromlaufdiagramm der Anordnung zur Reflexionsmessung. RFL: Vektor-Antennen-Analysator FA-VA5, TR: Transformator (Übersetzungsverhältnis 1:ü), C = 330 pF, L = 10 µH.

Formel sollte seine Resonanzfrequenz $f_0 = 2{,}77$ MHz betragen – gemessen wurden 2,79 MHz. Parallel zu Spule und Kondensator denken wir uns den oben erwähnten, die Verluste darstellenden Ersatzwiderstand. Sein Leitwert G (= $1/R$) ist umgekehrt proportional zum Q-Faktor des Kreises[8]. Der Antennen-Analysator (*RFL*) und *RLC*-Schwingkreis sind über den oben beschriebenen *HF*-Transformator (*TR*) gekoppelt. Wie schon erwähnt, wird der Gütefaktor des *RLC*-Kreises durch die Impedanz-Transformation des *HF*-Transformators nicht verändert[3]. Ein Foto der Anordnung zeigt Abb. 2.

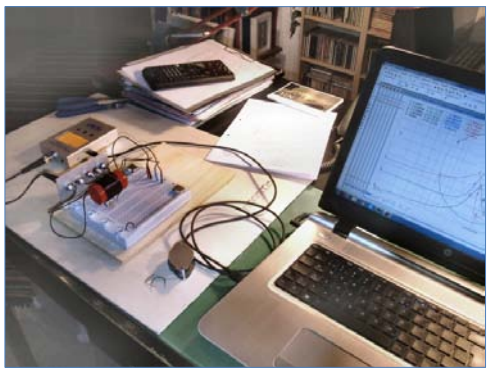

Abbildung 2 Messanordnung, aufgebaut auf einer Experimentierplatine XP101. Der Antennen-Analysator FA-VA5 ist im Hintergrund links sichtbar - zu erkennen am bernsteinfarbenen Display.

Der Reflexionsfaktor Γ wird in der Regel über einen mehr oder weniger großen Bereich von Frequenzen gemessen. Seine Messwerte erscheinen im Smith-Diagramm als Ortskurve mit der Frequenz f oder Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ als Parameter. Man kann zeigen[9], dass die Ortskurve im Fall einer Admittanz Y, deren Realteil G sich wie beim Schwingkreis nicht mit der Frequenz ändert, ein (geometrischer) Kreis ist. Nimmt man die Kalibrierung des Antennen-Analysators unmittelbar an den „Klemmen" des *RLC*-Kreises vor[10], verursacht die Länge des Anschlusskabels keine Drehung der Messwerte im Smith-Diagramm. In diesem Fall berührt der Ortskurven-Kreis den Kurzschluss-Punkt des Diagramms. Das ist der Punkt für den Grenzfall $f \to 0$ mit den Koordinaten (– 1, 0). Mit wachsender Frequenz wandern die Messpunkte des Ortskurven-Kreises zunächst in den „nördlichen" Bereich der Γ-Ebene (der induktiven Halbebene mit Im{Γ} > 0), biegen dann aber zurück in Richtung reelle Achse. Diese durchstoßen sie bei der Resonanzfrequenz $\omega_0 = 1/\sqrt{(LC)}$ und setzen danach ihre Wanderung in der „südlichen" Hälfte der Γ-Ebene (der kapazitiven Halbebene mit Im{Γ} < 0) fort.

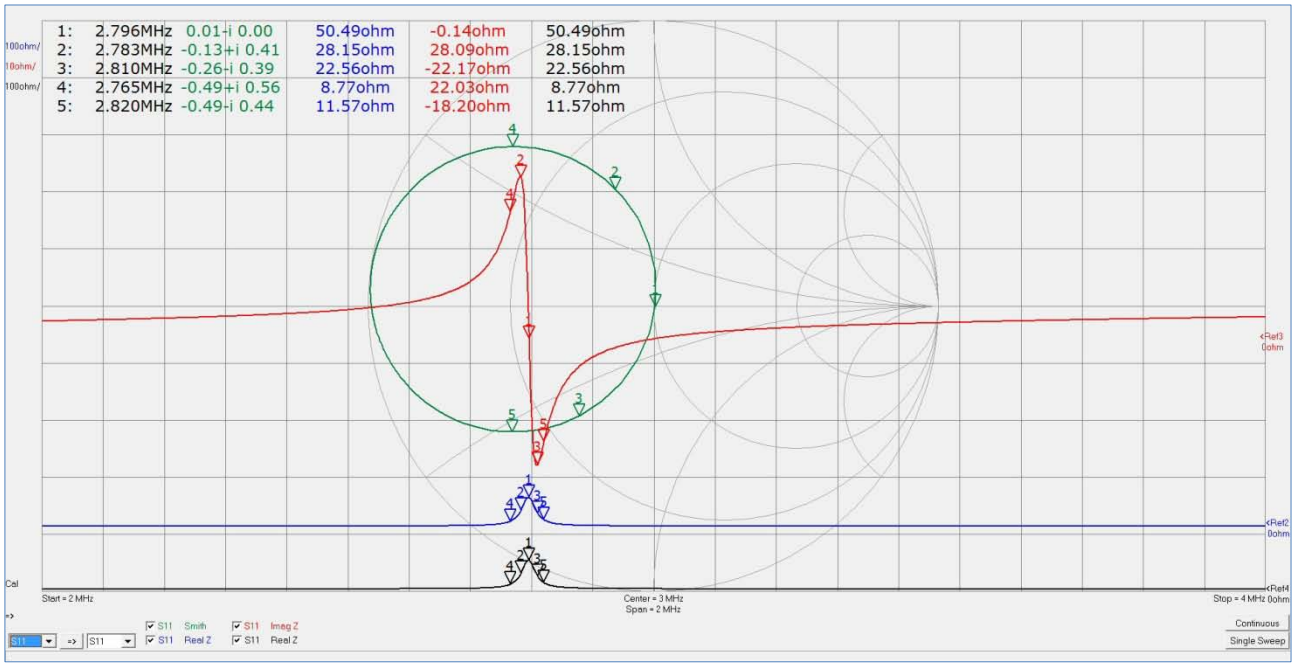

Abbildung 3 Ortskurve des Reflexionsfaktors Γ (hier mit S_{11} bezeichnet) als Smith-Diagramm (grüne Kurve) und Frequenzgang der Impedanz Z des Parallel-RLC-Kreises, dargestellt in kartesischen Koordinaten. Z aufgeteilt in Real- und Imaginärteil (blaue bzw. rote Kurve). Messung im Frequenzintervall von 2 bis 4 MHz. Symbole ▽ markieren Stellen mit charakteristischen Frequenzwerten. Bei Resonanz (Frequenzmarke 1) ist Γ = 0 (Stehwellenverhältnis[11] VSWR = 1), also kritische Kopplung. Bedeutung der übrigen Frequenzmarken: siehe Text. Die schwarze Kurve ist identisch mit der blauen Kurve für den Realteil von Z.

Im vorliegenden Experiment wurde Γ im Frequenzintervall zwischen 2 und 4 MHz gemessen. Das Ergebnis zeigt Abbildung 3. Hier ist, als Funktion der Frequenz, nicht nur der Reflexionsfaktor Γ, sondern auch die Impedanz *Z* des *RLC*-Kreises aufgetragen – und zwar in unterschiedlichen Koordinatensystemen. Die Ortskurve des Γ-Faktors (grüne Kurve) ist als Smith-Diagramm dargestellt, die Impedanz *Z*, aufgeteilt in Real- und Imaginärteil (blaue bzw. rote Kurve) in einem rechtwinkligen, kartesischen Koordinatensystem. Das Übersetzungsverhältnis *ü* des *HF*-Transformators wurde im vorliegenden Fall so gewählt ($ü \approx 1/16$), dass die Γ-Ortskurve bei der Resonanzfrequenz f_0 = 2,796 MHz (Marke 1) durch den Ursprung des Smith-Diagramms geht. Bei dieser Frequenz ist demnach Γ = 0 oder, ausgedrückt durch das Stehwellenverhältnis[11], *VSWR* = 1. Diese, bei f_0 reflexionsfreie Anpassung von Antennen-Analysator und Resonator bzw. *RLC*-Kreis wird als *kritische Kopplung* bezeichnet.

Neben der Resonanzfrequenz sind für die Bestimmung der Güte *Q* zwei Paare von Frequenzen von Interesse: Das Paar f_2 = 2,783 MHz und f_3 = 2,810 MHz (Marken 2 und 3) und das Paar f_4 = 2,765 MHz und f_5 = 2,820 MHz (Marken 4 und 5). Bei den Frequenzen f_2 und f_3 sind Real- und Imaginärteil der Impedanz *Z* dem Betrag nach gleich. Ihre Differenz $\Delta f_{23} = f_3 - f_2$ = 0,027 MHz ist die –3dB-Bandbreite des unbelasteten Kreises[3]. Der zugehörige Gütefaktor $f_0/\Delta f_{23}$ ist die *unbelastete Güte* (oder *Eigengüte*) Q_0 des Kreises, hier also Q_0 = 2,796/0,027 = 104. Weitere Messungen ergaben Bandbreiten, die um maximal ± 0,001 MHz von dem genannten Wert abwichen. Das heißt, Q_0 kann mit einer Genauigkeit von ± 4% angegeben werden, also $Q_0 = 104 \pm 4$. Der zu Spule und Kondensator parallel liegende Ersatzwiderstand hat damit den Wert *R* = 18,1 kΩ ($G = 5{,}52 \cdot 10^{-5}$ S).

Die Frequenzen f_4 und f_5 zeichnen sich dadurch aus, dass für sie der Imaginärteil von Γ dem Betrag nach maximal ist. Aus ihrer Differenz Δf_{45} ergibt sich die Güte Q_L, die sich bei Belastung des Kreises einstellt[3] (so genannte *belastete Güte*). Hier ist Δf_{45} = 0,055 MHz, so dass $Q_L = f_0/\Delta f_{45}$ = 2,796/0,055 = 51 folgt. Die Theorie ergibt für den Fall kritischer Kopplung $Q_0 = 2Q_L$. Diese Beziehung ist hier in etwa erfüllt.

Der Wert für den unbelasteten Gütefaktor erscheint plausibel, sollte aber durch eine unabhängige Messung bestätigt werden. Ich benutzte deshalb mein *USB*-Oszilloskop und die zugehörige *FFT*-Software[12], um den Q_0-Wert des *RLC*-Kreises nochmals zu bestimmen (*FFT* = Fast Fourier Transform). Er lässt sich, wie üblich, aus der –3dB-Bandbreite seiner Filterkurve (Resonanzkurve) ablesen. Das *USB*-Oszilloskop besitzt einen Funktionsgenerator, der neben anderen Schwingungsformen auch ein Rauschsignal vom Typ „weißes Rauschen" erzeugt, also eine Rauschspannung mit von der Frequenz unabhängiger Intensität. Man legt dieses Signal an den *RLC*-Kreis an und beobachtet, welche Frequenzen aus dem gleichförmigen Rauschspektrum herausgefiltert werden. Abbildung 4 zeigt das Schaltbild meines Messaufbaus. Der Kreis ist über einen 4,7 MΩ-Widerstand an den

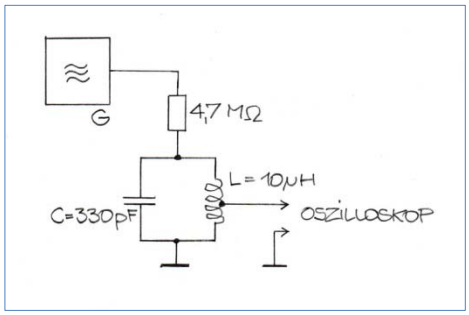

Abbildung 4 Stromlaufdiagramm der Anordnung zur Messung der Filterkurve des RLC-Kreises. Das Oszilloskop ist an einen PC angeschlossen, dessen FFT-Software das vom Kreis herausgefilterte Signal spektral zerlegt. Erläuterungen zur Schaltung siehe Text.

Funktionsgenerator angeschlossen, damit der Innenwiderstand des Generators den Kreis nicht belastet. Auch das Oszilloskop, mit dem das Spektrum der herausgefilterten Frequenzen beobachtet wird, darf den Kreis nicht belasten. Das Signal, das ihm zugeführt wird, wird deshalb an einem Viertel der Spulenwindungen abgegriffen (6. Windung vom kalten Ende aus). Widerstand und niederohmiger Abgriff sollen sicherstellen, dass tatsächlich die Resonanzkurve des *unbelasteten* Kreises aufgezeichnet wird. Das *FFT*-Programm zerlegt das an der Spule abgegriffene Signal nach Frequenzen und stellt das Spektrum auf dem Bildschirm des Rechners dar. Abbildung 5 zeigt das Ergebnis.

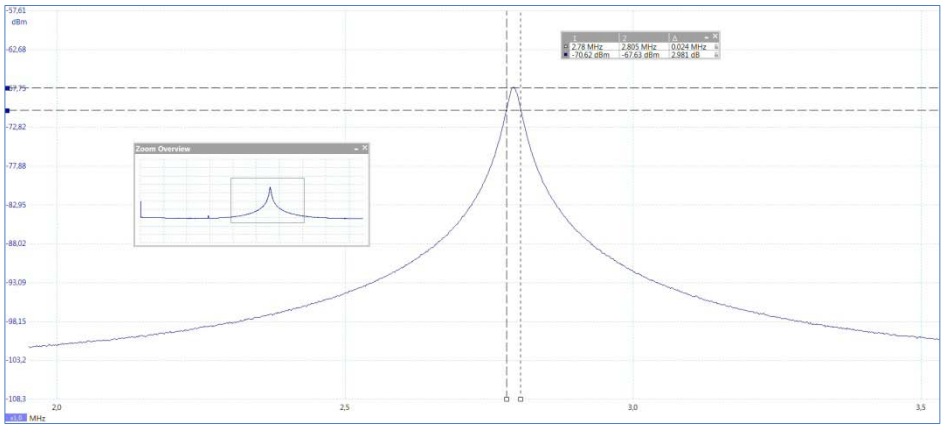

Abbildung 5 Filterkurve des RLC-Kreises: Intensität des vom Oszilloskop abgegriffenen Signals als Funktion der Frequenz f. Waagerechte Linien: Höhe des Maximums und des –3dB-Niveaus, senkrechte Linien: die dem –3dB-Niveau entsprechenden Frequenzen. Zahlenwerte siehe Text.

Die Darstellung wurde durch einige Hilfslinien ergänzt: Die waagerechten Linien geben die Höhe des Maximums und des – 3dB-Niveaus an, die senkrechten Linien die dem – 3dB-Niveau entsprechenden Frequenzen. Sie sind in dem eingeblendeten Kästchen aufgeführt. Ihre Differenz ist Δf = 0,025 MHz. Als Resonanzfrequenz liest man ab f_0 = 2,7925 MHz, so dass sich ein Q-Wert von Q_0 = 2,7925/0,025 = 109 ergibt. Weitere Messung ergaben als Mittelwert Δf = 0,0255 ± 0,0005 MHz bei einer Resonanzfrequenz f_0 = 2,7918 MHz. Daraus errechnet sich ein Gütefaktor Q_0 = 109,5 ± 1,1. Das Ergebnis ist durchaus verträglich mit dem Resultat Q_0 = 104 ± 4 der Reflexionsmessung.

Anmerkungen

[1] Der Vektor-Antennen-Analysator *FA-VA*5 wird in Amateurfunk-Kreisen als Bausatz gehandelt. Er wurde von *Michael Knitter* (*DG5MK*) entworfen, die Software zur Anbindung des Geräts an einen *PC* und zur Darstellung der Ergebnisse auf dem Bildschirm stammt von *Thomas Baier* (*DG8SAQ*). Ausführliche Beschreibung des Geräts in: *Funkamateur* 4/18, S. 322 (2019) und *Funkamateur* 4/18, S. 436 (2019).

[2] siehe z. B. *Michael H. W. Hoffmann*: *Hochfrequenztechnik*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997, oder *Stephan Rupp*, *Andreas Maier*: *Hochfrequenztechnik*, Skript *T2ELN3001* – Duale Hochschule Baden-Württenberg, Stuttgart, 2016.

[3] *Uwe Siart*: *Kurzanleitung zum Smith-Diagramm*, Version 3.79 (tutorien@siart,de), http://www.siart.de/lehre/smishort.pdf

[4] *F. Caspers*: *RF Engineering Basic Concepts – The Smith Chart*, *CERN*, Geneva

[5] Versuch 1.2 – *Hochfrequenzresonatoren*, Physikalisches Praktikum für Fortgeschrittene, Institut für Kernphysik, *TU* Darmstadt. www.ikp.tu-darmstadt.de› ikp › lehre_ikp › vers12

[6] Das Gender-Sternchen (oder der Gender-Doppelpunkt) hat sich inzwischen in Sachen Geschlechter-Gerechtigkeit durchgesetzt – obwohl die Männer im Dativ Plural ein »n« benötigen, was man beispielsweise in » ...von Physiker*innen« oder »…von Physiker:innen« nicht unterbringen kann.

[7] *Antonio G.*, *Markus J.*, *Hélène G.* und *Alex S.*: *RF Cavity experiments*, indico.cern.ch

[8] Es ist $G = \dfrac{1}{Q\,\omega_0 L} = \dfrac{\omega_0 C}{Q} = \dfrac{1}{Q}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

[9] Rechnung dazu siehe z. B. Anhang.

[10] Nimmt man die Kalibrierung des *FA-VA5* (Short-Open-Load-Kalibrierung) unmittelbar an den Klemmen des *RLC*-Kreises vor, liegt die Referenzebene für den Reflexionsfaktor genau dort (so genannte *detuned short-position*).

[11] Das Stehwellenverhältnis (Voltage Standing Wave Ratio, *VSWR*) ist gegeben durch

$$VSWR = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} \ .$$

[12] *USB*-Oszilloskop *PicoScope* 2208B (100 MHz, mit *Arbitrary Waveform Generator*) der Firma *Pico Technology Ltd.*, St. Neots, UK.

Anhang: Ortskurve (Smith-Diagramm) der Admittanz des Parallel-RLC-Kreises

Die Impedanz Z eines Parallel-*RLC*-Kreises ist gegeben durch

$$(1) \qquad Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + jB} = \frac{1}{\dfrac{1}{R} + j\omega C + \dfrac{1}{j\omega L}} \ .$$

Dabei ist $G = 1/R$ der Leitwert des Ohmschen Widerstands, der die Verluste des Kreises darstellt, L die Induktivität der Spule und C die Kapazität des Kondensators. Wie üblich bezeichnet ω die mit 2π multiplizierte Frequenz f der am Kreis anliegenden Wechselspannung, $\omega = 2\pi f$. Der Nenner Y des Bruchs auf der rechten Seite ist der komplexe Leitwert oder die Admittanz des Kreises. Wir schließen den Schwingkreis (in Gedanken) an einen Vektor-Analysator an, der den komplexen Reflexionsfaktor Γ unserer Schaltung bestimmt. Gesucht ist die Ortskurve des Reflexionsfaktors im Smith-Diagramm, also die Kurve, die Γ in der komplexen Ebene durchläuft, wenn ω variiert wird.

Für den Reflexionsfaktor einer Leitung der Impedanz Z_0, die mit einer Last der Impedanz Z abgeschlossen ist, gilt

$$(2) \qquad \Gamma = \frac{Z - Z_0}{Z + Z_0} \; .$$

Die Last ist in unserem Fall der Parallel-*RLC*-Kreis, Z ist also durch Gleichung (1) gegeben. Das Smith-Diagramm ist das Ergebnis einer konformen Abbildung, die die komplexe Z-Ebene gemäß Gleichung (2) in die komplexe Γ-Ebene abbildet. Dabei normiert man die an der Abbildung beteiligten Impedanzen auf eine reelle Impedanz Z_0, in der Regel auf $Z_0 = 50\ \Omega$, um mit einheitenfreien Größen zu rechnen. Mit

$$(3) \qquad z = \frac{Z}{Z_0}$$

vereinfacht sich die Abbildung zu

$$(4) \qquad \Gamma = \frac{z - 1}{z + 1} \; .$$

Die gesuchte Ortskurve ist das Bild der durch Gleichung (1) gegebenen Impedanz Z (oder Admittanz Y) unter der Abbildung (4).

Da Γ eine komplexe Zahl ist, setzen wir $\Gamma = a + jc$. Das heißt, wir bezeichnen mit a den Real- und mit c den Imaginärteil von Γ. Außerdem vereinbaren wir, fortan mit den *normierten* Werten $z = Z/Z_0$ und $y = YZ_0$ zu rechnen, die Bezeichnungen Z und Y, die wir für die nicht-normierten Größen benutzt haben, aber beizubehalten. Damit gilt

$$(5) \qquad \Gamma = \frac{\frac{1}{Y} - 1}{\frac{1}{Y} + 1} = \frac{\frac{1}{G + jB} - 1}{\frac{1}{G + jB} + 1} = \frac{1 - (G + jB)}{1 + (G + jB)} = a + jc$$

(G und B auf Z_0 normiert, wie vereinbart) und es folgt

$$(6) \qquad 1 - G - jB = a(G + 1) - cB + j\left[c(G + 1) + aB\right] \; .$$

Trennt man nach Real- und Imaginärteil, ergibt sich das Gleichungssystem

$$(7) \qquad \begin{aligned} a(G + 1) - cB &= 1 - G \\ aB + c(G + 1) &= -B \end{aligned} \; .$$

Gesucht ist jetzt die Beziehung zwischen a und c für den Fall G = konstant (In der Y-Ebene liegen die Werte mit konstantem G auf Geraden parallel zur imaginären, also vertikalen Achse). Dazu eliminieren die Größe B aus dem Gleichungssystem (7). Aus der zweiten Gleichung dieses Systems folgt

$$(8) \qquad B = -c\frac{G + 1}{a + 1} \; .$$

Das setzen wir in die erste Gleichung von (7) ein:

$$
\begin{aligned}
a(G+1) + c^2\frac{G+1}{1+a} &= 1-G \\
a(G+1)(1+a) + c^2(G+1) &= (1-G)(1+a) \\
a^2 + a + c^2 &= \frac{1-G}{G+1} + a\frac{1-G}{G+1} \\
a^2 + c^2 + a - a\frac{1-G}{G+1} &= \frac{1-G}{G+1} \\
a^2 + c^2 + a\frac{G+1}{G+1} - a\frac{1-G}{G+1} &= \frac{1-G}{G+1} \\
a^2 + 2a\frac{G}{G+1} + c^2 &= \frac{1-G}{G+1}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Jetzt werden die beiden mit a behafteten Terme zu einem Quadrat ergänzt:

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2a\frac{G}{G+1} + \left(\frac{G}{G+1}\right)^2 + c^2 &= \left(\frac{G}{G+1}\right)^2 + \frac{1-G}{G+1} \\
\left(a + \frac{G}{G+1}\right)^2 + c^2 &= \frac{1}{(G+1)^2}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Das ist die Gleichung einer Schar von Kreisen mit dem Mittelpunkt $m(a_m, c_m) = m(-G/(G+1), 0)$ und dem Radius $\rho = 1/(G+1)$. Ihre Mittelpunktskoordinaten (a_m, c_m) und Radien ρ hängen nur von G ab. Tabelle 1 listet die Koordinaten (a_m, c_m) und Radien ρ einiger Kreise für charakteristische Werte von G. Die Kreise zeichnen sich aus durch:

- Die Mittelpunkte m liegen wegen $c_m = 0$ auf der reellen Achse.
- Wegen $-G/(G+1) \leq 0$ liegen die Mittelpunkte auf der *negativen* reellen Achse.
- Der Punkt $(-1, 0)$ ist gemeinsamer Punkt aller Kreise der Schar.
- Der Radius $\rho = 1/(G+1)$ ist kleiner oder gleich 1, für alle Kreise gilt also $\rho \leq 1$.

Tabelle 1 Mittelpunktskoordinaten (a_m, c_m) und Radien ρ einiger Kreise in der Γ-Ebene für Admittanzen Y mit konstantem Realteil G. (G normiert auf Z_0)

G	(a_m, c_m)	ρ
0	$\left(\frac{0}{0+1}, 0\right) = (0,0)$	$\frac{1}{0+1} = 1$
0,5	$\left(-\frac{0,5}{0,5+1}, 0\right) = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{0,5+1} = \frac{2}{3}$
1	$\left(-\frac{1}{1+1}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$	$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$
2	$\left(-\frac{2}{2+1}, 0\right) = \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$	$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$
∞	$\left(-\frac{\infty}{\infty+1}, 0\right) = (-1,0)$	$\frac{1}{\infty+1} = 0$