

1. Einleitung

Ein gerader stromführender Draht lenkt eine Kompassnadel ab. Wir schreiben diese Wirkung dem Magnetfeld zu, das von ihm ausgeht. Streut man Eisenfeilspäne auf eine Unterlage, die vom Draht senkrecht durchstoßen wird, ordnen sich diese in konzentrischen Kreisen um den Draht als Mittelpunkt an. Die Kreise machen die Feldlinien des Magnetfelds sichtbar. Strom und Magnetfeld sind demnach miteinander verknüpft – wie, das lässt sich zeigen, wenn man als „Magnetfeld-Detektoren“ nicht Kompassnadeln oder Eisenfeilspäne benutzt, sondern untersucht, wie eine (punktförmige) elektrische Ladung auf den Strom im Draht reagiert. Solange die Ladung ruht, zeigt sie keine Reaktion. Der Draht ist trotz des Stroms, der in ihn fließt, elektrisch neutral. Also gehen von ihm keine elektrischen Feldlinien aus, deshalb wirkt auch keine Kraft auf die Ladung. Eine Kraft misst man erst, wenn sich die Ladung relativ zum Draht bewegt: Ein Hinweis darauf, dass hier die Relativitätstheorie im Spiel ist. Wir betrachten als „einfachste“ Relativbewegung die gleichförmige Bewegung parallel zum Draht. Die Kraft auf die bewegte Ladung lässt sich in der Tat als lorentztransformierte elektrische Kraft beschreiben. Sie heißt dementsprechend *Lorentzkraft*. Hier geht es um den Versuch, diese Kraft zu messen.

2. Messverfahren

Dass eine Ladung q eine Kraft erfährt, wenn sie sich parallel zu einem stromführenden Draht bewegt, ist plausibel: Man (lorentz-)transformiere das System, in dem sich die Ladung bewegt (das Laborsystem), in das System, in dem die Ladung q ruht (das mitbewegte System). In diesem bewegen sich die Elektronen und positiven Ladungen des Drahtes entgegengesetzt zur Bewegungsrichtung der Ladung q , und zwar verschieden schnell. Ihre gegenseitigen Abstände sind daher auch unterschiedlich stark lorentzkontrahiert. Deshalb ist der Draht im mitbewegten System elektrisch geladen und übt auf die Ladung q die aus der Elektrostatik bekannte Coulombkraft aus. Nach Rücktransformation in das Laborsystem erhält man die gesuchte Lorentzkraft. Da es um die Messung der Kraft geht, hier nur das Ergebnis:

$$(1) \quad F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2I}{r} \cdot qv$$

Dabei ist ϵ_0 die Influenzkonstante (*Dielektrizitätskonstante* des Vakuums), I die Stärke des im Draht fließenden Stroms, v die Geschwindigkeit der Ladung (im Laborsystem) und r der Abstand der Ladung vom stromführenden Draht. Eine Herleitung der Formel, die von den relativistischen Transformationsformeln Gebrauch macht, findet sich im Anhang. Sie ist dem Physiklehrbuch *Concepts in Physics* von Adair¹ entnommen.

Üblicherweise wird die Lorentzkraft als Kreuzprodukt von qv und der magnetischen Feldstärke B definiert. In unserem Fall stehen v und B senkrecht aufeinander, so dass die Kraft gleich dem arithmetischen Produkt qvB ist. Der Vergleich mit Gl. (1) zeigt, dass die Feldstärke des Magnetfeldes, das den Draht umgibt, gegeben ist durch

$$(2) \quad B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r},$$

wobei μ_0 die *Permeabilität* des Vakuums ist ($\mu_0 = 1/\epsilon_0 c^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{Vs} / \text{Am}$).

Diese aus den Lehrbüchern bekannte Gleichung leitet man in der Regel aus dem *Ampere'schen* Durchflutungsgesetz ab. Auf den stromführenden Draht angewandt, lautet es: Die Liniensumme der magnetischen Feldstärke längs der Feldlinie mit dem Radius r , also $2\pi rB$, ist gleich μ_0 mal dem Strom I , der durch die von der Feldlinie eingeschlossene Fläche hindurchtritt.

Unser Ziel ist es, die durch Gl. (1) gegebene Kraft zu messen. Wir messen diese Kraft nicht direkt, sondern die durch sie bewirkte seitliche Ablenkung der Ladung. Da Gl. (1) das Ergebnis zweier Lorentz-Transformationen ist, kann man die Messung als Test der *Speziellen Relativitätstheorie* auffassen. Das entsprechende Experiment ist deshalb von einem gewissen pädagogischen Wert. Es eignet sich im Physikunterricht der Schule zumindest zur Demonstration des Effekts. Will man es numerisch auswerten, muss man den Schülern und Schülerinnen klarmachen, dass Messergebnisse mit Fehlern behaftet sind. Die Messwerte sind nämlich nur der Größenordnung nach mit den theoretisch berechneten verträglich (siehe unten). In einem Leistungskurs kann man den Schülern und Schülerinnen auch die Herleitung der Gleichung (Anhang) zumuten – mit Hilfestellung.

Das Prinzip des Experiments ist einfach: ein Elektronenstrahl verläuft parallel zu einem stromführenden Draht und wird dabei seitlich abgelenkt, je nach Stromrichtung vom Draht weg oder auf den Draht zu. Die Ablenkung lässt sich z. B. in einer Elektronen-Ablenkröhre beobachten, die von der Lehrmittelindustrie² angeboten wird. In ihr werden Elektronen wie in einer Kathodenstrahlröhre beschleunigt, zu einem Strahl fokussiert und streifend an einem Fluoreszenzschirm entlang gelenkt. Der Schirm leuchtet auf dort, wo er von Elektronen getroffen wird. Er liegt in der Bahnebene des nahezu kreisförmig³ abgelenkten Strahls. Seine Ablenkung lässt sich am Koordinatengitter des Schirms (cm-Raster) ablesen. Abbildung 1 zeigt ein Foto der Anordnung.

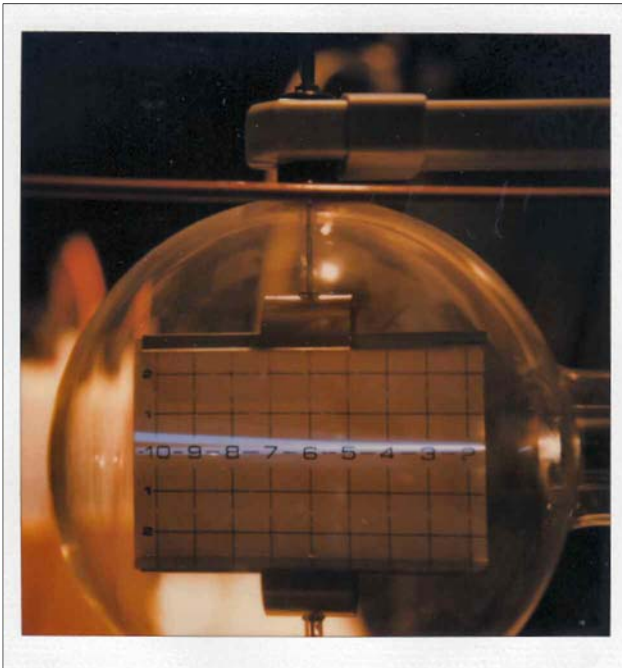


Abbildung 1 Elektronen-Ablenkröhre mit stromführenden Draht (oberhalb des Glaskolbens). Der Strom fließt von links nach rechts. Das Magnetfeld ist daher unterhalb des Drahtes in die Bildebene hinein gerichtet. Die Elektronen bewegen sich von rechts nach links. Die Lorentzkraft lenkt den Elektronenstrahl nach oben ab.

Wie oben gesagt, berechnen wir zur Bestätigung von Gl. (1) die seitliche Ablenkung des Strahls am Ende des Fluoreszenzschirms und vergleichen diese mit dem gemessenen Wert. Die Geometrie der Anordnung geht aus Abbildung 2 hervor. Die Elektronen werden durch die Spannung U zwischen Kathode und Anode der Elektronenkanone beschleunigt und treten durch ein Loch im Anodenblech aus. Dort befindet sich der Nullpunkt unseres Koordinatensystems, die x -Achse zeige in Richtung der Elektronenbewegung nach rechts, die y -Achse in Richtung auf den stromführenden Draht zu. Nach dem Durchgang durch die Anode bleibt die Geschwindigkeit der Elektronen in x -Richtung konstant, da in dieser Richtung keine Kraft auf sie einwirkt. Das heißt, der Weg x der Elektronen wächst mit der Zeit t gemäß

$$x = vt ,$$

wobei v die Elektronengeschwindigkeit ist und t vom Zeitpunkt des Durchgangs durch die Anode aus gezählt wird. In y -Richtung wirkt die uns interessierende Lorenzkraft F . Sie führt zu einer

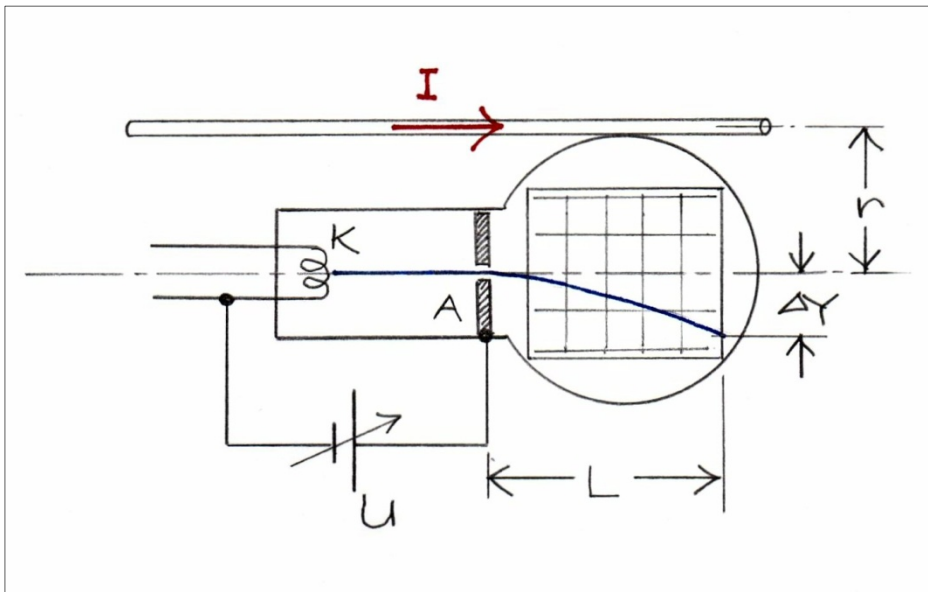


Abbildung 2 Geometrie der Anordnung

gleichmäßig beschleunigten Bewegung mit der Beschleunigung F/m , wenn wir mit m die Ruhmasse des Elektrons bezeichnen. Wir nehmen an, wie in Abbildung 2 eingezeichnet, dass F auf den stromführenden Draht hin gerichtet ist. Dann gilt für den in y -Richtung zurückgelegten Weg

$$y = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2$$

Eliminieren wir aus den letzten beiden Gleichungen die Zeit t , folgt als Bahngleichung der Elektronen

$$(3) \quad y = \frac{1}{2m} F \frac{x^2}{v^2}$$

Die Strecke zwischen Anode und dem Ende des Schirms habe die Länge L und die Ablenkung dort werde mit Δy bezeichnet. Dann gilt

$$(4) \quad \Delta y = \frac{F}{2m} \frac{L^2}{v^2}$$

Die Geschwindigkeit v der Elektronen ergibt sich aus dem Energiesatz, angewandt auf die Beschleunigungsstrecke zwischen Kathode und Anode der Röhre: Die potentielle Energie eU der Elektronen am Ort der Kathode ist demnach gleich der kinetischen Energie $mv^2/2$ am Ort der Anode, also

$$(5) \quad \frac{1}{2} m v^2 = eU$$

Daraus folgt

$$(6) \quad v^2 = \frac{2eU}{m}$$

und Gl. (4) wird zu

$$(7) \quad \Delta y = \frac{F L^2}{4 e U}$$

Setzen wir für F den Term aus Gl. (1) ein, wird

$$(8) \quad \Delta y = \frac{1}{4 \pi \epsilon_0 c^2} L^2 \sqrt{\frac{e}{2 m U}} \frac{I}{r}$$

Damit hängt Δy ab von der Stromstärke I im Draht, von dessen Abstand r zum Elektronenstrahl, von der Länge L der Elektronenlaufstrecke und von der Beschleunigungsspannung U der Elektronen. Kritisch ist die Abhängigkeit von L , da diese Größe quadratisch eingeht.

3. Abschätzung der Größenordnung des Effekts

Anhand von Gl. (8) schätzen wir zunächst die Größenordnung von Δy ab – und hoffen, dass die Ablenkung mit den zur Verfügung stehenden Geräten überhaupt sichtbar gemacht werden kann. Zur Verfügung stand die Ablenkröhre der Firma *3B Scientific Physics* (# D1000651). Ihr Glaskolben hat einen Durchmesser von etwa 13 cm, so dass der Abstand r des Drahtes vom Elektronenstrahl nicht kleiner als 6,5 cm gemacht werden kann. Die Länge L ist durch die Abmessung des Fluoreszenzschirms vorgegeben: $L = 10$ cm. Laut Datenblatt des Herstellers sind Beschleunigungsspannungen zwischen 1 kV und 5 kV möglich. Gewählt wurde ein mittlerer Wert von etwa 2 kV, bei kleineren Werten war der Strahl weniger gut sichtbar. Die Stromstärke I sollte möglichst groß sein. Eine 12 V-Autobatterie liefert zwar Ströme großer Stärke, Werte über 20 A lassen sich jedoch mit einem handelsüblichen Amperemeter nicht messen. Deshalb wurde bei diesen Stromstärken der Spannungsabfall an einem sehr kleinen Vorwiderstand gemessen und in Ampere umgerechnet. Als Widerstand diente ein 42 cm langer, 1,3 mm dicker Kupferdraht, sein Widerstand wurde zu $0,00541 \Omega$ gemessen. Das ergab als Umrechnungsfaktor $185 (\pm 7) \text{ A/V}$. Mit den Werten $r = 0,065$ m, $L = 0,10$ m, $U = 2$ kV und $I = 20$ A folgt nach Gl. (8) eine Ablenkung $\Delta y = 2,04$ mm. Das heißt, der Effekt sollte gerade noch sichtbar (und messbar) sein. Es geht in dem Experiment also darum, ob man trotz der genannten Beschränkungen sinnvolle Messwerte erzielt.

4. Messungen, Ergebnisse

Mehrere Versuchsreihen wurden ausgeführt. Zwei dieser Reihen, bei denen es um die Abhängigkeit von der Stromstärke I im Draht ging, wurden zusammengefasst. Bei diesen waren Spannung U und Abstand r gleich: $U = 2,0$ kV bzw. $r = 0,065$ m. $L = 0,10$ m, wie schon erwähnt. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 1.

Tabelle 1 Abhängigkeit der Auslenkung Δy von der Stärke I des Stroms im Draht. $U = 2,0$ kV, $r = 0,065$ m und $L = 0,10$ m. Daten vom 02.05.1990 und 02.06.2003

Datum	I / A	$\Delta y / \text{mm}$
02.05.1990*)	9,2	$1,5 \pm 0,5$
	16,6	$2,0 \pm 0,5$
	18,5	$2,5 \pm 0,5$
	29,6	$3,5 \pm 0,5$
02.06.2003**)	2	$0,5 \pm 0,5$
	4	$1,5 \pm 0,5$
	6	$1,5 \pm 0,5$
	8	$2,0 \pm 0,5$

	10	$2,0 \pm 0,5$
--	----	---------------

- *) Stromstärke I mit Hilfe des Vorwiderstands gemessen (siehe Text)
- **) Stromstärke mit Amperemeter gemessen

In Abbildung 3 sind die entsprechenden Daten als Messpunkte in ein Koordinatensystem mit I als waagerechter und Δy als senkrechter Achse eingetragen. Die Anpassung einer (Nullpunkts-) Geraden durch die Punkte liefert als Steigung $K = 0,138 \pm 0,015 \text{ mm/A}$ ($\chi^2/\text{Freiheitsgrad} = 1,5$).

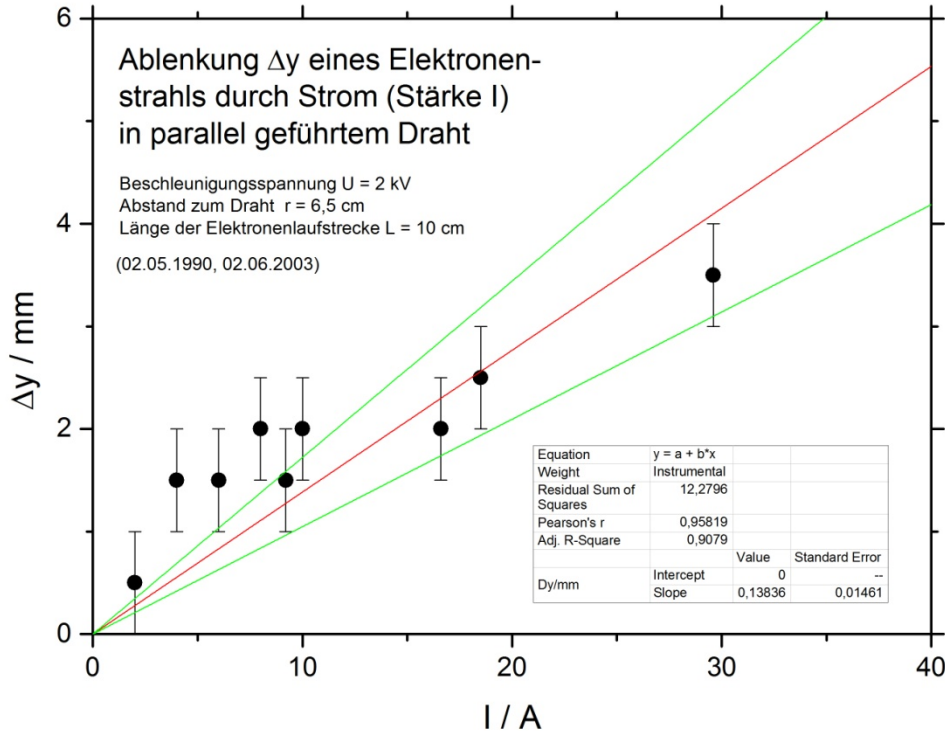


Abbildung 3 Ablenkung des Elektronenstrahls in Abhängigkeit von der Stromstärke im Draht. Beschleunigungsspannung $U = 2 \text{ kV}$. Daten vom 02.05.1990 und 02.05.2003 kombiniert.

Nach Gl. (8) ist die Steigung der Geraden

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} L^2 \sqrt{\frac{e}{2mU}} \frac{1}{r}$$

Mit den Zahlenwerten $U = 2,0 \text{ kV}$, $r = 0,065 \text{ m}$, $L = 0,10 \text{ m}$ und $e/m = 1,759 \cdot 10^{11} \text{ As/kg}$ ergibt sich

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot 1020,2 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}$$

also

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{0,138 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{A}}}{1,0202 \cdot 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{Vs}}} = 1,35 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Bei einer weiteren Messreihe wurde ebenfalls die Stromstärke I variiert, allerdings bei einer Beschleunigungsspannung von $U = 2,5$ kV. Tabelle 2 und Abbildung 4 zeigen das Ergebnis.

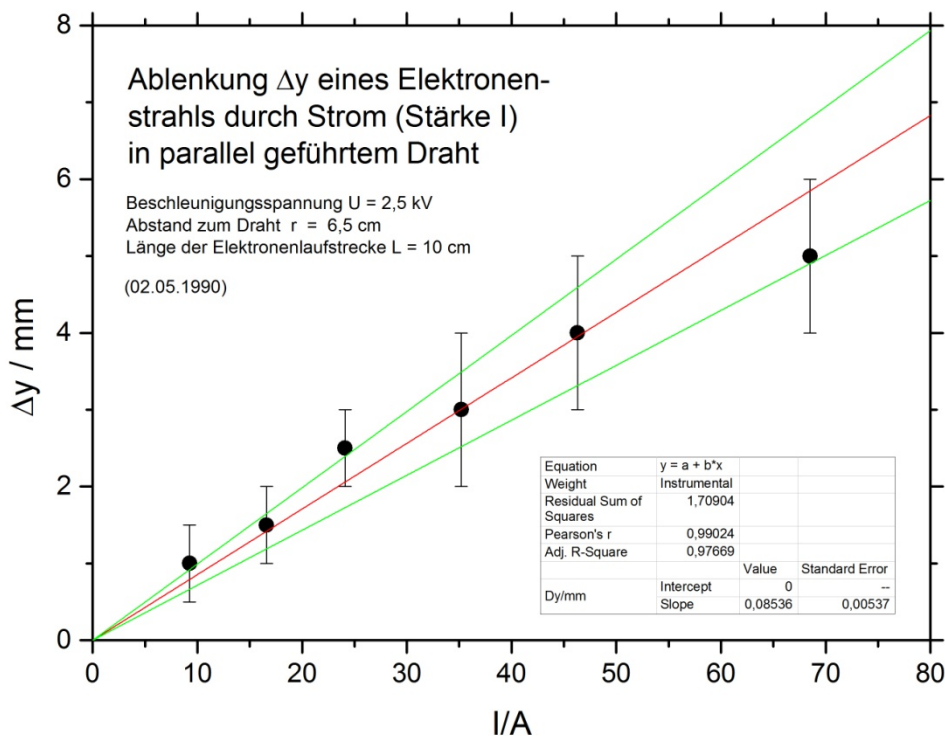


Abbildung 4 Ablenkung des Elektronenstrahls in Abhängigkeit von der Stromstärke im Draht. Beschleunigungsspannung $U = 2,5$ kV. Messung am 02.05.1990.

Tabelle 2 Abhängigkeit der Auslenkung Δy von der Stärke I des Stroms im Draht. $U = 2,5$ kV, $r = 0,065$ m und $L = 0,10$ m. Messung am 02.05.1990

I / A *)	$\Delta y / mm$
9,25	$1,0 \pm 0,5$
16,6	$1,5 \pm 0,5$
24,1	$2,5 \pm 0,5$
35,2	$3,0 \pm 1,0$
46,3	$4,0 \pm 1,0$
68,5	$5,0 \pm 1,0$

*) Stromstärke I mit Hilfe des Vorwiderstands gemessen (siehe Text)

Die Anpassung der Geraden an die Messpunkte in Abbildung 4 ergibt als Steigung $K = 0,0854 \pm 0,054$ mm/A. Das führt zu

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = \frac{0,0854 \cdot 10^{-3} \frac{m}{A}}{0,9120 \cdot 10^3 \frac{m^2}{Vs}} = 0,937 \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

In einer letzten Versuchsreihe wurde bei konstanter Beschleunigungsspannung $U = 2,5$ kV und (fast) konstanter Stromstärke I der Abstand r variiert. Da I nur annähernd konstant war, wurde Δy in Abhängigkeit von I/r gemessen. Die Daten zeigt Tabelle 3.

Tabelle 3 Abhängigkeit der Auslenkung Δy vom Abstand r zwischen Draht und Strahlachse. $U = 2,5$ kV und $L = 0,10$ m. Messung am 02.05.1990

r / m	I / A *)	$(I/r) / (\text{A/m})$	$\Delta y / \text{mm}$
0,065	68,5	1054	$5,0 \pm 0,5$
0,08	65	812,5	$3,5 \pm 0,5$
0,09	65	722,2	$3,0 \pm 0,5$
0,115	64,8	563,5	$1,7 \pm 1,0$

*) Stromstärke I mit Hilfe des Vorwiderstands gemessen (siehe Text)

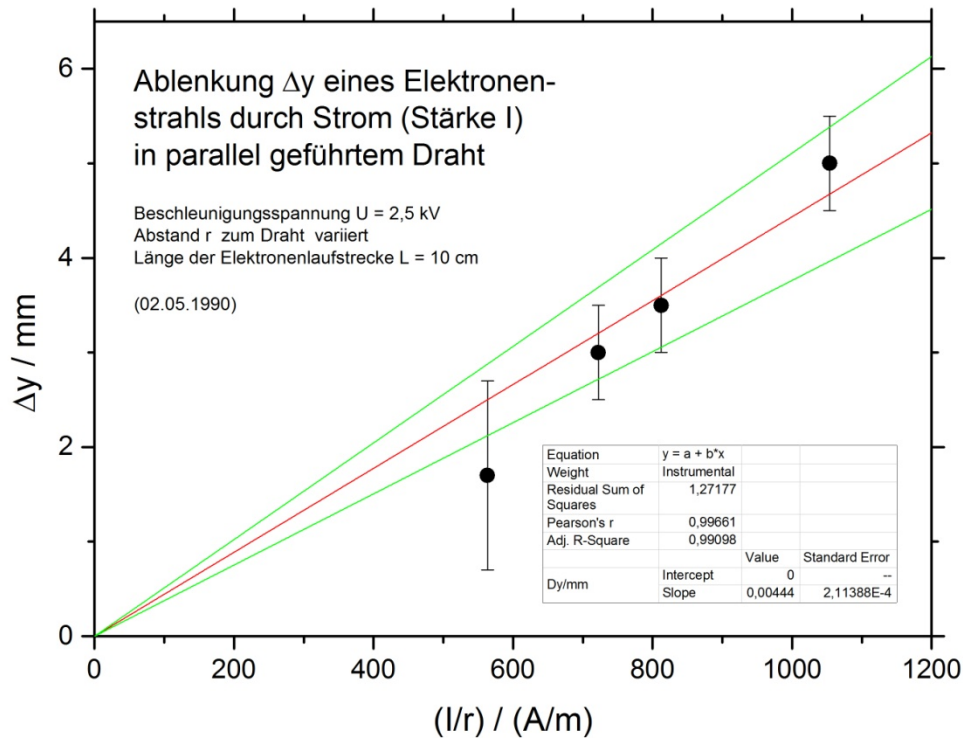


Abbildung 5 Ablenkung des Elektronenstrahls in Abhängigkeit vom Abstand r . Da die Stromstärke I nicht konstant war, wurde die Ablenkung in Abhängigkeit von I/r aufgetragen

In Abbildung 5 sind die Daten der Tabelle 3 aufgetragen, also die Auslenkung Δy als Funktion von I/r . Die Steigung der angepassten Geraden ist $K = 0,00444 \pm 0,00021$ mm/(A/m). Theoretisch ist jetzt

$$K = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} L^2 \sqrt{\frac{e}{2mU}}$$

also

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0 c^2} = K \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{2mU}{e}} = K \cdot 0,1687 \frac{V_S}{m^3} = 0,00444 \frac{m^2}{A} \cdot 0,1687 \frac{V_S}{m^3} = 0,749 \cdot 10^{-7} \frac{V_S}{Am}$$

Damit liegen drei Messwerte der universellen Konstanten $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ vor. Sie stimmen nicht überein. Das deutet auf systematische Fehler hin, deren Ursache ohne weitere Messungen nicht feststellbar ist. Ein endgültiges Ergebnis sollte trotzdem angegeben werden: Der (nicht gewichtete) Mittelwert der drei Messwerte ist

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} = (1,01 \pm 0,34) \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

wobei der Fehler den größten und kleinsten Messwert einschließt. Theoretisch sollte sich exakt $1,00 \cdot 10^{-7}$ Vs/Am ergeben. Dass der experimentelle Mittelwert mit diesem fast übereinstimmt, ist Zufall. Die Werte der Einzelmessungen zeigen, dass man nicht damit rechnen kann, ihn bei weiteren Messungen zu reproduzieren. Das Experiment liefert aber zumindest die richtige Größenordnung.

Literatur

- 1) *Robert K. Adair: Concepts in Physics*, Academic Press, New York 1969, Kapitel 21
- 2) z. B. *3B Scientific Physics*
- 3) man vernachlässigt die Änderung der Magnetfeldstärke auf dem Weg des abgelenkten Elektronenstrahls

Lorentzkraft auf bewegte Ladung

Wir suchen einen Term für die Kraft auf eine Ladung q , die sich mit der Geschwindigkeit v parallel zu einem stromführenden Draht bewegt. Die Stromstärke im Draht sei I , der Abstand der Ladung zum Draht r . Dazu gehen wir vom Laborsystem aus in das Koordinatensystem, das sich genau so schnell wie die Ladung, nämlich mit der Geschwindigkeit v , relativ zu diesem bewegt. In diesem „mitbewegten“ System ruht die Ladung. Wir berechnen die Kraft auf die im mitbewegten System ruhende Ladung und transformieren sie dann in das Laborsystem zurück.

Im Laborsystem ist der Draht elektrisch neutral, da er pro Längeneinheit gleich viele positive wie negative Ladungen enthält. Bezeichnen wir die entsprechenden Ladungsdichten (Ladung pro m) mit λ_+ bzw. λ_- , so ist die Nettoladung $\lambda = \lambda_+ + \lambda_-$ gleich Null. Im mitbewegten System ist die Nettoladung *ungleich* Null, da sich die positiv geladenen Atomrümpfe des Drahtes und die Elektronen in ihm *relativ* zur Ladung q verschieden schnell bewegen. Wegen der unterschiedlichen Geschwindigkeit sind sie in Bewegungsrichtung verschieden stark lorentzkontrahiert. In Abbildung 1 sind die beiden Koordinatensysteme gegenübergestellt.

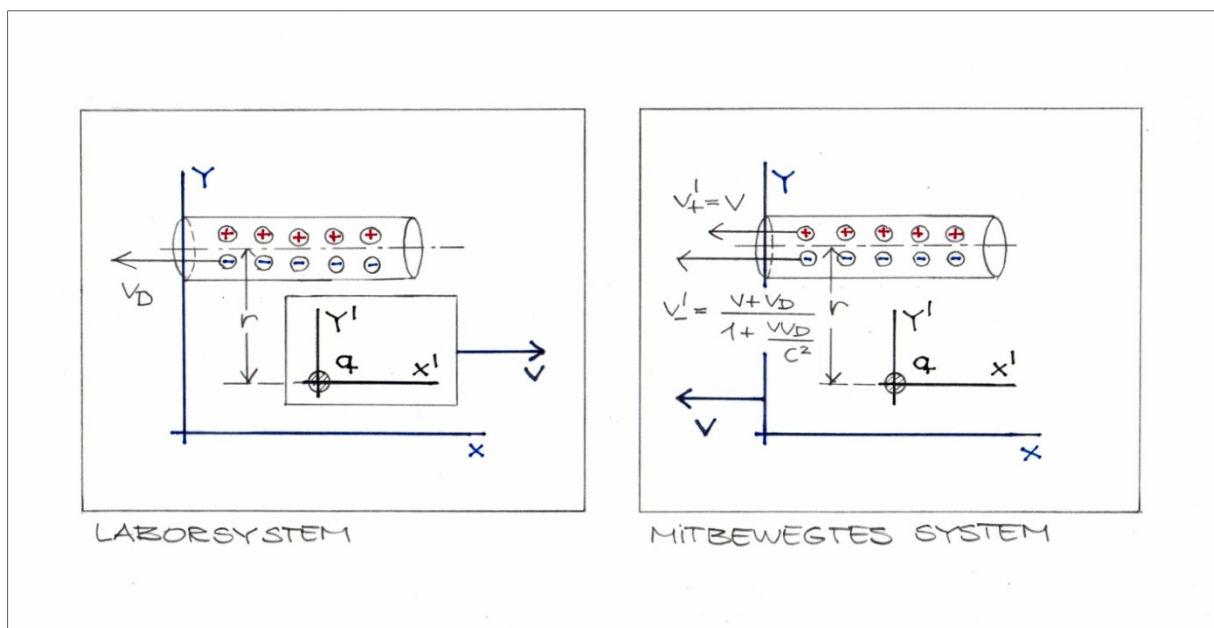


Abbildung 1 Koordinaten des Laborsystems (ungestrichelt) und des mitbewegten Systems (gestrichelt). Die Geschwindigkeit der Ladung q im Laborsystem ist v . Im mitbewegten System ist sie Null, da sich dieses in der gleichen Richtung mit derselben Geschwindigkeit bewegt. Im mitbewegten System bewegen sich Atomrümpfe und Elektronen im Draht verschieden schnell (hier nach links). Ihre Ladungsdichten sind wegen der unterschiedlichen Lorentzkontraktion verschieden. Der Draht ist daher im mitbewegten System elektrisch geladen und übt auf die Ladung q eine (elektrostatische) Kraft aus. Im Laborsystem wird sie als Kraft aufgefasst, die von einem Magnetfeld ausgeht und auf die bewegte Ladung wirkt.

Wir nehmen an, dass im Laborsystem der Strom I und die Geschwindigkeit v der Ladung gleich gerichtet sind (klassische Stromrichtung). In der Abbildung ist das die Richtung nach

rechts. In diesem System sind die positiven Atomrümpfe des Drahts in Ruhe, während sich die Elektronen im Draht mit der Driftgeschwindigkeit v_D nach links bewegen. Vom mitbewegten System aus betrachtet bewegen sich sowohl Elektronen als auch Atomrümpfe, und zwar auch nach links. Die Atomrümpfe haben die Geschwindigkeit v , die Elektronen eine Geschwindigkeit, die sich nach dem Additionstheorem aus v und v_D ergibt. Für die Ladungsdichte der Atomrümpfe gilt daher

$$(1) \quad \lambda'_+ = \frac{\lambda_+}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

mit $c =$ Lichtgeschwindigkeit. Dabei ist λ_+ die Ladungsdichte im Ruhesystem der Atomrümpfe, in diesem Fall also gleich dem Laborsystem. Das Additionstheorem, angewandt auf v und v_D , ergibt für die Elektronengeschwindigkeit im mitbewegten System

$$(2) \quad v'_- = \frac{v + v_D}{1 + \frac{v v_D}{c^2}}.$$

Daher ist die Ladungsdichte der Elektronen, ausgedrückt durch die Dichte $(\lambda_-)_0$ in ihrem Ruhesystem

$$(3) \quad \lambda'_- = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_-}{c}\right)^2}} (\lambda_-)_0.$$

Das Ruhesystem der Elektronen ist jedoch nicht das Laborsystem, da sich die Elektronen relativ zu ihm mit v_D bewegen. Das heißt, die Elektronendichte λ_- im Laborsystem ist gegeben durch

$$(4) \quad \lambda_- = \frac{(\lambda_-)_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}}$$

und damit folgt

$$(5) \quad (\lambda_-)_0 = \lambda_- \sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}.$$

Die Ladungsdichte der Elektronen transformiert sich daher vom Labor- ins mitbewegte System gemäß

$$(6) \quad \lambda'_- = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v'_-}{c}\right)^2}} \lambda_-.$$

Dabei ist für v'_- der in Gleichung (2) angegebene Term einzusetzen, also

$$(7) \quad \lambda'_- = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{v + v_D}{1 + \frac{v v_D}{c^2}} \right)^2}} \lambda_-.$$

Das lässt sich umformen:

$$\begin{aligned}
\lambda'_- &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} \left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(v + v_D)^2}} \lambda_- \\
&= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} \left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)}{\sqrt{1 + 2\frac{vv_D}{c^2} + \left(\frac{vv_D}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 - 2\frac{vv_D}{c^2} - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}} \lambda_- \\
&= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} \left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2\right] - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2}} \lambda_- \\
&= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} \left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2\right] - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2\right]}} \lambda_- \\
&= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2} \left(1 + \frac{vv_D}{c^2}\right)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{v_D}{c}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]}} \lambda_- \\
&= \frac{1 + \frac{vv_D}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_-
\end{aligned}
\tag{8}$$

Wir setzen diesen Term und den Term in Gleichung (1) zusammen zur gesamten Ladungsdichte λ' im mitbewegten System:

$$\lambda' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ + \frac{1 + \frac{vv_D}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_- .
\tag{9}$$

Da wegen der Neutralität des Drahtes im Laborsystem gilt $\lambda_- = -\lambda_+$, folgt

$$\begin{aligned}
 \lambda' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ - \frac{1 + \frac{v v_D}{c^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ \\
 (10) \quad &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ - \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ - \frac{v v_D}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+ \\
 &= - \frac{v v_D}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \lambda_+
 \end{aligned}$$

In diesem Term lässt sich das Produkt $v_D \lambda_+$ durch die Stromstärke I ausdrücken: im Zeitintervall dt tritt durch einen beliebigen Querschnitt des Drahtes die Ladung $\lambda_+ dx$ mit $dx = v_D dt$. Also ist die Stromstärke (Ladung/Zeit) $I = \lambda_+ v_D dt / dt = \lambda_+ v_D$. Damit ist

$$(11) \quad \lambda' = - \frac{v I}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Nach dem *Gauß*'schen Satz der Elektrostatik folgt daraus für die elektrische Feldstärke, die von einem Stück des Drahtes mit der Länge dx ausgeht,

$$\epsilon_0 E' 2\pi r dx = -\lambda' dx$$

und damit

$$(12) \quad E' = \frac{\lambda'}{2\pi \epsilon_0 r} .$$

Die Kraft, die das Feld im mitbewegten System auf die dort ruhende Ladung q ausübt, ist also

$$(13) \quad F' = q \frac{\lambda'}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \frac{q v I}{2\pi \epsilon_0 c^2 r} .$$

Die Rücktransformation von F' in das Laborsystem ist einfach, wenn man die Bewegung der Ladung q quer zum Draht betrachtet. In dieser Richtung gibt es keine Lorentzkontraktion, so dass der Weg y , der zwischen zwei Ereignissen zurückgelegt wird, in beiden Systemen gleich ist. Das heißt, es gilt

$$(14) \quad y = y' \quad \text{mit} \quad y = \frac{a}{2} t^2 \quad \text{und} \quad y' = \frac{a'}{2} t'^2 .$$

Dabei sind a und a' die Beschleunigungen in y - (bzw. y' -) Richtung. Setzen wir für sie die Quotienten Kraft/Masse, so ergibt sich

$$\frac{F'}{m'} t'^2 = \frac{F}{m} t^2 ,$$

also

$$(15) \quad F = \frac{m}{m'} \left(\frac{t'}{t} \right)^2 F' .$$

Wegen der Zeitdilatation und der relativistischen Massenveränderung ist

$$t' = t \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} \quad \text{und} \quad m = \frac{m'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2}} .$$

Das, eingesetzt in Gleichung (15), führt zu

$$(16) \quad F = F' \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c} \right)^2} .$$

Gleichung (13) wird damit zu

$$(17) \quad F = \frac{qvI}{2\pi \varepsilon_0 c^2 r} = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} qv \frac{2I}{r} \quad \text{qed.}$$

Da

$$\frac{1}{4\pi \varepsilon_0 c^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} ,$$

wobei μ_0 die *Permeabilität des Vakuums* ist, schreibt man auch

$$(18) \quad F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I}{r} qv .$$

Dabei ist der Term

$$(19) \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}$$

die magnetische Feldstärke, die der stromdurchflossene Draht im Abstand r erzeugt.