

Ostern, so lernt man, fällt auf den ersten Sonntag nach dem Frühlingsvollmond, der Frühlingsvollmond seinerseits ist der erste Vollmond nach Frühlingsanfang. Den Frühlingsanfang haben Astronomen festgelegt als den Zeitpunkt, an dem die Sonne auf ihrer Bahn den Himmelsäquator aufsteigend durchstößt. Diesen Schnittpunkt von Sonnenbahn (Ekliptik) und Himmelsäquator nennt man dementsprechend *Frühlingspunkt*. Der so definierte astronomische Frühlingsanfang kann auf den 19., 20. oder 21. März fallen. Aber Ostern ist ein christliches Fest, deshalb hatte die Kirche ein Mitspracherecht bei der Terminvergabe: sie legte schon 325 auf dem Konzil von Nikäa (heute Iznik, Türkei) den Frühlingsanfang unverrückbar auf den 21. März. Im Zuge der Kalenderreform 1582 wurde zudem ein Rechenverfahren erarbeitet, das die Vollmondphasen recht gut vorhersagt. Es wurde zur Festlegung des Osterdatums verbindlich vorgeschrieben und ist als *Datumsregel nach dem Kirchenzyklus* bekannt. Später entwickelte C. F. Gauss aus dieser Regel einen Algorithmus, nach der sich das Osterdatum berechnen lässt.

Trotz der eindeutigen Festlegung des Osterdatums gibt es Probleme, die unter dem Stichwort *Osterparadox* bekannt sind. K. Habermann¹ diskutiert sie in einem Artikel mit der Überschrift *Wann feiern wir eigentlich Ostern?* Wer ihn liest, ist informiert und findet in den nachfolgenden Zeilen nur wenig Neues.

Sie könnten trotzdem von Interesse sein, denn sie enthalten die Ergebnisse astronomischer Rechnungen, die ich gemacht habe – und zwar für die Jahre, die Habermann als Beispiele für ungewöhnliche Osterdaten erwähnt. Die Programme dazu sind der Sammlung von Astronomie-Programmen entnommen, die O. Montenbruck und Th. Pfleger in ihrem Buch *Astronomie mit dem Personal Computer*² beschreiben. Das Buch enthält die zum Verständnis der Algorithmen notwendige Astronomie und eine ausführliche Dokumentation der (C++)Programme. Zwei dieser Programme wurden benutzt (Anhang A). Ein weiteres, von mir geschriebenes und hier benutztes (Java-)Programm ist die Routine zur Berechnung des Osterdatums nach Gauss (Anhang B).

Zum weiteren Verständnis einige Details: Aktueller Anlass meiner Spielereien mit den genannten Computer-Programmen ist das Oster-Paradoxon des Jahres 2019. Der astronomische Frühling beginnt in diesem Jahr am 20. März, 22:58 Uhr MEZ. Damit fügt sich der kirchlich verordnete Frühlingsanfang (der 21. März) recht gut in das astronomische Geschehen ein, die Osterrechnung ist soweit in Ordnung. Das Problem beginnt damit, dass unser Trabant schon kurz nach diesem Zeitpunkt (also kurz nach dem 20. März, 22:58 Uhr MEZ) die Phase „Vollmond“ erreicht, nämlich am 21. März, 2:43 Uhr MEZ. Ostern müsste daher, astronomisch gesehen, auf den darauf folgenden Sonntag, den 24. März fallen. Tatsächlich ist aber nach dem Kirchenzyklus (und nach dem Rechenverfahren von Gauss) Ostern am 21. April, also vier Wochen später.

Man könnte vermuten, die Verschiebung des Osterdatums sei bedingt durch die zeitliche Nähe von (astronomischen) Frühlingsbeginn und nachfolgendem Vollmond. Das aber wirft neue Fragen auf, die K. Habermann¹ mit Recht stellt: Sie verweist auf die Jahre 1799, 1856 und 2008, in denen es auch am Stichtag des Konzils von Nikäa (am 21. März) einen Vollmond gab, ohne dass Ostern verschoben wurde. Tabelle 1 gibt einen Überblick über die Zeitpunkte, die in der Sache Osterdatum eine Rolle spielen – und zwar in den Jahren 1799, 1856 und 2008, im Jahr 2019 und, als Gegenbeispiel (Normalfall) im Jahr 2020.

Inspektion der Tabelle ergibt, dass es offenbar darauf ankommt, wann genau am 21. März der Vollmond eintritt. In den Jahren 1799, 1856 und 2008 ist das frühestens am Nachmittag (nach 16:00 Uhr MEZ) der Fall, im Jahr 2019 aber schon um 2.43 Uhr MEZ. Warum der am frühen Morgen auftretende Vollmond des Jahres 2019 eine Verschiebung des Osterdatums hervorruft, die Nachmittags-Vollmonde der Jahre 1799, 1856 und 2008 jedoch nicht, ist m. E. unverständlich. Vielleicht spielt die Zeitzone eine Rolle. Es ist natürlich nicht unerheblich, auf welchen Meridian (Längengrad) sich die Zeitangabe des Vollmonds bezieht³.

Diese und weitere Probleme des Osterdatums werden, wie schon gesagt, von Habermann¹ diskutiert. Der Artikel enthält auch einen historischen Abriss der Kontroverse zwischen astronomisch „wahrem“ und von

Tabelle 1 Daten von Jahren, für die (astronomischer) Frühlingsanfang und nachfolgender Vollmond zeitlich nahe beieinander liegen. Sie sind z. T. der Arbeit von Habermann¹ entnommen. Das Jahr 2020 (ein "normales" Jahr) dient der Gegenüberstellung. Das Datum des Ostersonntags stimmt überein mit dem, das sich nach dem Gauss'schen Rechenverfahren (Anhang B) ergibt.

Jahr	astronomischer Frühlingsanfang MEZ (UT = MEZ-1)	erster Vollmond nach dem astronomischem Frühlingsanfang	erster Frühlingsvollmond nach Kirchenzyklus	Datum Ostersonntag
1799	20.03., 15:30 MEZ	21.03., 16:00 MEZ	21.03.1799	24.03.1799
1856	20.03., 10:48 MEZ	21.03., 17:05 MEZ	21.03.1856	23.03.1856
2008	20.03., 05:49 MEZ	21.03., 19:41 MEZ	21.03.2008	23.03.2008
2019	20.03., 22:58 MEZ	21.03., 02:43 MEZ	19.04.2019	21.04.2019
2020	20.03., 04:50 MEZ	08.04., 03:36 MEZ	08.04.2020	12.04.2020

der Kirche gesetztem zyklischen Ostertermin. Es überrascht nicht, dass die Protestanten nach 1582 den von der Kirche (vom Papst) angeordneten Zyklus zunächst ablehnten.

Zum Schluss die Bemerkung, dass diese „Kurzfassung“ des Osterproblems in keiner Weise die umfangreiche Literatur zum Thema ersetzt⁴. Und dass mein Beitrag dazu im Grunde nur Ergebnisse von Rechenprogrammen sind, die andere geschrieben haben.

Anhang A - Programme PLANPOS und PHASES

Die numerischen Rechnungen zum Osterdatum wurden mit Programmen ausgeführt, die ich dem Buch *Astronomie mit dem Personal Computer*² von *O. Montenbruck* und *Th. Pfleger* entnommen habe. Zwei der dort beschriebenen (C++)Programme wurden benutzt – die Programme *PLANPOS* und *PHASES*.

Das Programm *PLANPOS* (Planetenposition) gibt nach Eingabe des Datums die Positionen der Sonne und der Planeten aus, sowohl in heliozentrisch ekliptikalen als auch geozentrisch äquatorialen Koordinaten. In der Einstellung *scheinbare Koordinaten* (Kommando *S*) wird die Position auf das wahre Äquinoktium des jeweiligen Datums bezogen. Sie muss im vorliegenden Fall gewählt werden, da es um die aktuellen Koordinaten der Sonne geht. Das heißt, nach Eingabe des Datums und der Uhrzeit des astronomischen Frühlingsanfangs sollte die (äquatoriale) Position der Sonne mit exakt $RA = 24^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}.00$ und $Dec = 0^{\circ}00'00''.0$ angegeben werden ($RA =$ Rektaszension, $Dec =$ Deklination). Das Programm rechnet in Ephemeridenzeit (*ET*), bei der Eingabe verwende ich jedoch der Eindeutigkeit halber die Weltzeit (Universal Time *UT*). Der Unterschied zwischen Welt- und Ephemeridenzeit beträgt laut Montenbruck und Pfleger etwa 1 Minute, er sollte die Rechnungen nicht nennenswert beeinträchtigen.

Abbildung 1 zeigt die Bildschirmausgabe von *PLANPOS* für den oben genannten Frühlingspunkt 20. März 2019, 22:58 Uhr *MEZ* (21:58 Uhr = 21,967 Uhr *UT*). Ausgegeben wird $RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.71$ und $Dec = -0^{\circ}00'01''.1$ (erste Zeile). Die Abweichung gegenüber den exakten Koordinaten könnte dadurch bedingt sein, dass die Zeit nicht, wie gefordert, in Ephemeridenzeit (*ET*), sondern in Weltzeit (*UT*) eingegeben wurde. Auch Rundungsfehler sind nicht ausgeschlossen.

```
PLANPOS: geozentrische und heliozentrische Planetenpositionen
(c) 1999 Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger

(J) J2000 astrometrisch      (B) B1950 astrometrisch
(S) Scheinbare Koordinaten  (E) Ende

Kommando ... S

Datum (JJJJ MM TT HH.HHH) ... 2019 03 20 21.967

Datum: 2019/03/20 22.0 (ET)    JD: 2458563.4    Aequinoktium des Datums

      l      b      r      RA      Dec      delta
      o ' "   o ' "   AE      h m s   o ' "   AE
Sonne  0 00 00.0  0 00 00.0  0.000000  23 59 59.71 - 0 00 01.1  0.995872
Merkur 196 37 59.8  3 43 04.4  0.411329  23 15 34.50 - 2 04 11.2  0.614481
Venus  267 11 25.8 - 0 36 35.5  0.726781  21 41 29.73 -14 13 35.2  1.203661
Erde   180 00 31.8 - 0 00 00.8  0.995872  0 00 00.00 + 0 00 00.0  0.000000
Mars   83 59 29.6  1 02 31.4  1.55418  3 22 03.76 +19 21 53.6  1.93175
Jupiter 252 58 31.1  0 36 21.1  5.32597  17 32 35.93 -22 39 21.6  5.12352
Saturn 283 52 35.4  0 25 45.0  10.05655  19 23 01.57 -21 38 36.6  10.34053
Uranus  32 10 31.3 - 0 30 58.0  19.85296  1 55 01.00 +11 15 03.3  20.70272
Neptun 346 15 41.9 - 0 59 46.3  29.93700  23 12 31.24 - 6 08 33.9  30.90511
Pluto  291 18 15.3 - 0 13 46.8  33.76364  19 38 51.15 -21 43 25.2  34.13792

l,b,r:  heliozentrisch ekliptikal (geometrisch)
RA,Dec: geozentrisch aequatorial (scheinbar)
delta:  geozentrische Entfernung (geometrisch)
```

Abbildung 1 Positionen der Sonne und der Planeten zum Zeitpunkt des astronomischen Frühlingsanfangs im Jahr 2019, Bildschirm-Ausgabe des Programms *PLANPOS* von Montenbruck und Pfleger². Der Zeitpunkt des Frühlingsanfangs ist der 20. März 2019, 22:58 Uhr *MEZ*. Einzugeben ist die Uhrzeit in Ephemeridenzeit *ET*. Da der Unterschied zur Weltzeit (Universal Time *UT*) nur etwa eine Minute beträgt, wird die Zeit der Eindeutigkeit halber in *UT* eingegeben, also 22:58 *MEZ* = 21:58 *UT* = 21.967 *UT*. Von Interesse ist die Position der Sonne zu diesem Zeitpunkt. In der Einstellung "Scheinbare Koordinaten" (*S*) werden die Koordinaten bezogen auf das wahre Äquinoktium des jeweiligen Datums ausgegeben, im vorliegenden Fall $RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.71$ und $Dec = -0^{\circ}00'01''.1$ (erste Zeile). Der exakte Frühlingspunkt hat die Koordinaten $RA = 24^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}.00$ und $Dec = 0^{\circ}00'00''.0$. Die Abweichung ist vermutlich durch die Zeitangabe in *UT* bedingt.

Das Programm *PHASES* berechnet für ein gegebenes Jahr den Zeitpunkt der Mondphasen Neumond, Erstes Viertel, Vollmond und Letztes Viertel. Abbildung 2 zeigt das Ergebnis für 2019.

```

PHASES: Zeitpunkte von Mondphasen und Finsternissen
(c) 1999 Oliver Montenbruck, Thomas Pfleger

Bestimmung der Mondphasen fuer das Jahr ... 2019

Neumond           Erstes Viertel   Vollmond         Letztes Viertel
2018/12/07 07:21  2018/12/15 11:50  2018/12/22 17:50  2018/12/29 09:35
2019/01/06 01:29c? 2019/01/14 06:47  2019/01/21 05:17t? 2019/01/27 21:11
2019/02/04 21:05  2019/02/12 22:27  2019/02/19 15:55  2019/02/26 11:29
2019/03/06 16:05  2019/03/14 10:28  2019/03/21 01:44  2019/03/28 04:11
2019/04/05 08:52  2019/04/12 19:07  2019/04/19 11:13  2019/04/26 22:19
2019/05/04 22:47  2019/05/12 01:13  2019/05/18 21:12  2019/05/26 16:35
2019/06/03 10:03  2019/06/10 06:00  2019/06/17 08:32  2019/06/25 09:48
2019/07/02 19:17c 2019/07/09 10:56  2019/07/16 21:39p 2019/07/25 01:19
2019/08/01 03:13  2019/08/07 17:32  2019/08/15 12:30  2019/08/23 14:57
2019/08/30 10:38  2019/09/06 03:12  2019/09/14 04:34  2019/09/22 02:42
2019/09/28 18:28  2019/10/05 16:48  2019/10/13 21:09  2019/10/21 12:40
2019/10/28 03:40  2019/11/04 10:24  2019/11/12 13:35  2019/11/19 21:12
2019/11/26 15:07  2019/12/04 06:59  2019/12/12 05:13  2019/12/19 04:58
2019/12/26 05:14c 2020/01/03 04:46  2020/01/10 19:22p? 2020/01/17 13:00

Alle Zeitangaben in Ephemeridenzeit (ET).

```

Abbildung 1 zeigt die Zeitpunkte der Mondphasen Neumond, Erstes Viertel, Vollmond und Letztes Viertel für 2019, Bildschirmausgabe des Programms *PHASES* von Montenbruck und Pfleger². Die Ephemeridenzeit *ET* ist bis auf Abweichungen von der Größenordnung Minute gleich der Weltzeit (Universal Time *UT*). Der Vollmond am 21.03.2019, 01:44 Uhr *ET* (02:44 Uhr *MEZ*) ist der Frühlingsvollmond (4. Zeile, 3. Spalte). In der Literatur findet man 2:43 Uhr *MEZ*, eine nur geringe Abweichung.

Der Computerausdruck (Bildschirm) enthält den Frühlingsvollmond mit der Zeitangabe 21.03.2019, 01:44 Uhr *ET* (4. Zeile, 3. Spalte). Setzt man $ET \cong UT$, so entspricht das der Uhrzeit 02:44 Uhr *MEZ*. In der Literatur findet man 2:42:56 Uhr *MEZ*, eine nur geringe Abweichung.

Tabelle 2 Berechnungen zu den Daten in Tabelle 1 mit den Programmen von Montenbruck und Pfleger: (1) Rektaszension (*RA*) und Deklination (*Dec*) der Sonne zu den Zeitpunkten des astronomischen Frühlingsanfangs (Programm *PLANPOS*, Spalte 3) und (2) Zeitpunkt des ersten Vollmonds danach (Programm *PHASES*, Spalte 4).

Jahr	astronomischer Frühlingsanfang <i>MEZ</i> ($UT = MEZ - 1$)	Position der Sonne zum Zeitpunkt des astronomischen Frühlingsanfangs, Programm <i>PLANPOS</i>	erster Vollmond nach dem astronomischen Frühlingsanfang, Programm <i>PHASES</i>
1799	20.03., 15:30 <i>MEZ</i>	$RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.92$ $Dec = 00^{\circ}00'00''.0$	21.03., 16:00 <i>MEZ</i>
1856	20.03., 10:48 <i>MEZ</i>	$RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.97$ $Dec = 00^{\circ}00'00''.0$	21.03., 17:05 <i>MEZ</i>
2008	20.03., 05:49 <i>MEZ</i>	$RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.84$ $Dec = -00^{\circ}00'01''.2$	21.03., 19:41 <i>MEZ</i>
2019	20.03., 22:58 <i>MEZ</i>	$RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.71$ $Dec = -00^{\circ}00'01''.1$	21.03., 02:44 <i>MEZ</i>
2020	20.03., 04:50 <i>MEZ</i>	$RA = 23^{\text{h}}59^{\text{m}}59^{\text{s}}.82$ $Dec = -00^{\circ}00'01''.2$	08.04., 03:36 <i>MEZ</i>

Tabelle 2 fasst die Ergebnisse der Rechnungen mit den Programmen *PLANPOS* und *PHASES* zusammen. Der Vergleich mit den aus der Literatur entnommenen Daten (Tabelle 1) zeigt, wie zu erwarten, eine gute Übereinstimmung.

Anhang B - Java-Methode zur Berechnung des Osterdatums

```
// Berechnung des Osterdatums nach Gauss
// Üblicher, allgemein bekannter Algorithmus
// Das %-Zeichen bedeutet modulo (mod), z.B. 23 mod 5 = 3
// Der Schrägstrich ("/") steht für die ganzzahlige Division

import java.util.Scanner;

public class Osterdatum {

    public static void main(String[] args) {

        Scanner eingabe = new Scanner(System.in);
        System.out.print("Jahr (> 1582) = ");
        int x = eingabe.nextInt();
        eingabe.close();

        int a = x % 19;
        int b = x % 4;
        int c = x % 7;
        int k = x/100;
        int p = k/3;
        int q = k/4;
        int M = (15 + k - p - q) % 30;
        int d = (19*a + M) % 30;
        int N = (4 + k - q) % 7;
        int e = (2*b + 4*c + 6*d + N) % 7;
        int od = 22 + d + e;
        if (od < 32)
            System.out.println("\nDas Osterdatum ist der " + od + ". März.");
        else
            System.out.println("\nDas Osterdatum ist der " + (od - 31) + ". April.");
    }
}
```

Literatur und Anmerkungen

- ¹ Katharina Habermann: *Wann feiern wir eigentlich Ostern?*,
<https://mathe2008.wordpress.com/2012/04/02/wann-feiern-wir-eigentlich-ostern/>
- ² Oliver Montenbruck und Thomas Pfleger: *Astronomie mit dem Personal Computer*, 3. Auflage,
J. Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork, 1999. Ein hervorragendes Buch, nicht nur für Experten.
- ³ Es kommen nicht viele Orte in Frage: *Jerusalem, Nikäa* oder vielleicht *Rom*?
- ⁴ Zitate außer dem unter ¹) genannten erspare ich mir. Ich bitte um Verständnis.