

1. Prinzip des Prismenspektrometers

Ein Prisma ist ein durchsichtiger Körper (beispielsweise aus Glas oder Plexiglas), der zwei *nicht* parallele Begrenzungsflächen besitzt. Von der Seite betrachtet, hat es die Form eines gleichschenkligen Dreiecks. Ein Lichtstrahl, der auf eine der genannten Flächen auftrifft, wird beim Durchgang durch das Prisma zwei Mal gebrochen – einmal beim Eintritt in das Prisma, zum anderen Mal beim Austritt aus demselben. Der Strahl wird dadurch aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Dabei hängt der Ablenkwinkel von der Wellenlänge und somit von der Farbe des Lichts ab. Deshalb wird das Licht nicht nur abgelenkt, sondern auch in die Farben zerlegt, die in ihm enthalten sind. Ein Gerät, das diese Auffächerung nach Farben mit Hilfe eines Prismas erzeugt und durch Messung des Ablenkwinkels die den Farben zugeordneten Wellenlängen bestimmt, heißt Prismenspektrometer¹.

2. Ablenkwinkel

Die (einmalige) Brechung eines Lichtstrahls an der Grenzfläche zwischen Medien unterschiedlicher optischer Dichte (zum Beispiel Luft und Glas) folgt dem Gesetz von *Snellius*. Danach hängt der Ablenkwinkel von den Brechungsindizes der Medien ab, die an der Grenzfläche zusammenstoßen. Die Brechungsindizes wiederum variieren mit der Wellenlänge des Lichts. In unserem Fall handelt es sich um den Übergang zwischen dem Medium Luft und dem Medium Glas bzw. Plexiglas. Der Brechungsindex für Luft ist in guter Näherung 1 (Eins), der Brechungsindex des Materials, aus dem das Prisma besteht, sei n . Abbildung 1 zeigt den Durchgang eines Lichtstrahls durch das Prisma. Die Winkel, die an den Grenzflächen von Luft nach Glas bzw. Glas nach Luft in die Formel von Snellius eingehen, sind hier mit $\alpha_{1,2}$ (auf der Seite der Luft) bzw. $\beta_{1,2}$ (auf der Seite des Glases) bezeichnet. Der Winkel, um den der Strahl nach dem Durchgang durch das Prisma insgesamt abgelenkt wird, werde φ genannt. Er hängt ab vom Winkel α_1 , unter dem der Strahl auf das Prisma trifft, vom Brechungsindex n und vom Winkel γ , unter dem sich die Begrenzungsflächen schneiden, die in der Seitenansicht die Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks bilden. Die Schnittgerade heißt *brechende Kante*, ihr gegenüber liegt die Basis des Dreiecks. Die Längen der Dreiecksseiten seien a (Schenkel) und d (Basis).

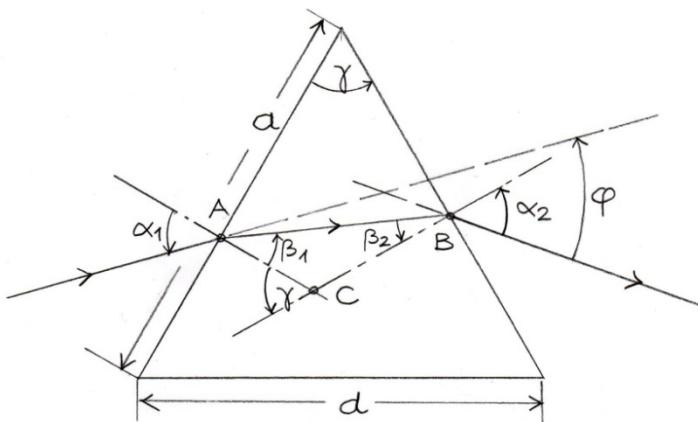


Abbildung 1 Brechung eines Lichtstrahls in einem Prisma. Der Lichtstrahl tritt bei A in das Prisma ein und tritt bei B aus. Weitere Bezeichnungen siehe Text.

Zur Berechnung von φ geht man aus von der Tatsache, dass der Strahl beim Eintritt in das Prisma um den Winkel $\alpha_1 - \beta_1$ und beim Austritt um den Winkel $\alpha_2 - \beta_2$ abgelenkt wird. Insgesamt wird er also um den Winkel

$$(1) \quad \varphi = \alpha_1 - \beta_1 + \alpha_2 - \beta_2$$

abgelenkt. Aus der Abbildung geht weiterhin hervor, dass γ Außenwinkel des Dreiecks ABC ist. Seine Maßzahl ist also gleich der Summe der Maße der nichtanliegenden Innenwinkel $\beta_1 + \beta_2$:

$$(2) \quad \gamma = \beta_1 + \beta_2 .$$

Die Winkel $\alpha_{1,2}$ und $\beta_{1,2}$ sind, wie schon erwähnt, durch das Brechungsgesetz von *Snellius* miteinander verknüpft. Danach ist

$$(3) \quad \begin{aligned} \sin \alpha_1 &= n \sin \beta_1 \\ \sin \alpha_2 &= n \sin \beta_2 \end{aligned} .$$

Kombiniert man (1) und (2), folgt

$$(4) \quad \varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \gamma .$$

Aus (3) erhält man

$$(5) \quad \alpha_2 = \arcsin[n \sin \beta_2] .$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nun schrittweise umgeformt:

$$(6) \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= \arcsin[n \sin \beta_2] \\ &= \arcsin[n \sin(\gamma - \beta_1)] \\ &= \arcsin[n \sin \gamma \cos \beta_1 - n \cos \gamma \sin \beta_1] \\ &= \arcsin[n \sin \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \beta_1} - n \cos \gamma \frac{\sin \alpha_1}{n}] . \\ &= \arcsin[n \sin \gamma \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{n^2}} - \cos \gamma \sin \alpha_1] \\ &= \arcsin[\sin \gamma \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \gamma \sin \alpha_1] \end{aligned}$$

Damit wird der Ablenkungswinkel

$$(7) \quad \varphi = \alpha_1 - \gamma + \arcsin[\sin \gamma \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha_1} - \cos \gamma \sin \alpha_1] .$$

Komplizierter geht's nicht. Der Term auf der rechten Seite ist in der Tat schwer verdaulich.

Vielleicht hilft eine grafische Darstellung: in Abbildung 2 ist φ als Funktion von α_1 aufgetragen – für $\gamma = 60^\circ$ und $n = 1,61$ (Flintglas $F2$ bei der Wellenlänge $\lambda = 587,6$ nm).

Der Verlauf des Ablenkungswinkels φ in Abhängigkeit vom Einfallswinkel α_1 ist wenig spektakulär. Die Kurve hat ein Minimum bei $\alpha_1 \cong 53,6^\circ$. Nicht ohne Weiteres erkennt man, dass für diesen Wert des Einfallswinkels α_1 der Austrittswinkel α_2 nach Gleichung (6) ebenfalls $53,6^\circ$ ist. Das heißt, die Ablenkung ist minimal, wenn gilt $\alpha_1 = \alpha_2$. In diesem Fall ist der Strahlengang symmetrisch zur

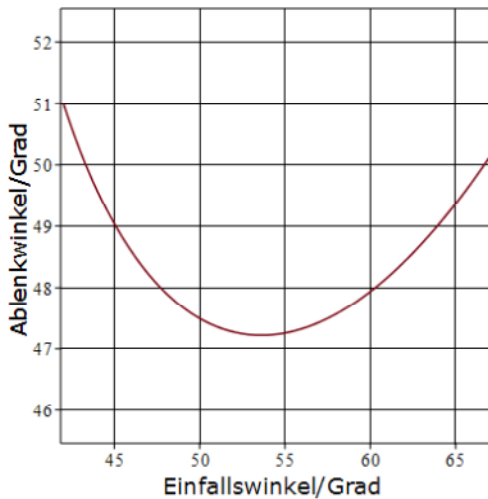


Abbildung 2 Ablenkwinkel φ als Funktion des Einfallswinkels α_1 , nach Gleichung (7) des Textes. Winkel $\gamma = 60^\circ$, Brechungsindex $n = 1,61$ (Wert für Flintglas F2 bei der Wellenlänge $\lambda = 587,6 \text{ nm}$).

Mittelachse des Prismas. Zum Beweis geht man wiederum von den Gleichungen (1) bis (4) aus: Das (notwendige) Kriterium für ein Minimum des Winkels φ ist bekanntlich

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_1} = 0 .$$

Angewandt auf Gleichung (4) ergibt sich

$$(8) \quad 1 + \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = 0 .$$

Dabei wurde benutzt, dass γ eine Konstante ist, deren Ableitung nach α_1 Null ist. Aus den Gleichungen (3) folgt

$$\frac{d(\sin \alpha_1)}{d\alpha_1} d\alpha_1 = n \frac{d(\sin \beta_1)}{d\beta_1} d\beta_1 ,$$

also

$$\cos \alpha_1 d\alpha_1 = n \cos \beta_1 d\beta_1$$

und entsprechend für α_2 und β_2

$$\cos \alpha_2 d\alpha_2 = n \cos \beta_2 d\beta_2 .$$

Daraus folgt

$$\frac{\cos \alpha_1 d\alpha_1}{\cos \alpha_2 d\alpha_2} = \frac{\cos \beta_1 d\beta_1}{\cos \beta_2 d\beta_2} .$$

Wegen $\gamma = \beta_1 + \beta_2$ ist $d\beta_2 = -d\beta_1$, so dass folgt

$$\frac{\cos \alpha_1 d\alpha_1}{\cos \alpha_2 d\alpha_2} = - \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2} .$$

Andererseits ist nach Gleichung (8) bei minimaler Ablenkung $d\alpha_2 = -d\alpha_1$. Daher ergibt sich

$$\frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} = \frac{\cos \beta_1}{\cos \beta_2}$$

oder

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \sin^2 \beta_1}{1 - \sin^2 \beta_2} .$$

Mit dem Brechungsgesetz $\sin \alpha_{1,2} = n \sin \beta_{1,2}$ folgt schließlich

$$\frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{n^2}}{1 - \frac{\sin^2 \alpha_2}{n^2}}$$

oder

$$(9) \quad \frac{1 - \sin^2 \alpha_1}{1 - \sin^2 \alpha_2} = \frac{n^2 - \sin^2 \alpha_1}{n^2 - \sin^2 \alpha_2} .$$

Diese Gleichung hat die triviale Lösung $n = 1$. Sie ist hier nicht von Interesse, da ein Prisma mit diesem Brechungsindex gleichbedeutend mit *keinem* Prisma ist. Es bleibt also nur die Lösung

$$(10) \quad \alpha_1 = \alpha_2 ,$$

also die Lösung Eintrittswinkel gleich Austrittswinkel. Schreibt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, gilt daher im Fall minimaler Ablenkung

$$(11) \quad \varphi_{\min} = 2\alpha - \gamma .$$

Man müsste eigentlich noch zeigen, dass die Kurve für φ an der Stelle α_1 mit $\alpha_1 = \alpha_2$ linksgekrümmt ist (erst $d\varphi/d\alpha_1 = 0$ und $d^2\varphi/d\alpha_1^2 > 0$ sind bekanntlich hinreichend). Diesen Teil des Beweises ersparen wir uns – Abbildung 2 zeigt, dass die Kurve den richtigen Krümmungssinn hat. Da die Winkel α_1 und α_2 gleich groß sind, gilt das auch für die Winkel β_1 und β_2 . Mit $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ folgt daher aus (2)

$$(12) \quad \gamma = 2\beta .$$

Mit dem Brechungsgesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$ ergibt sich dann aus (11) und (12)

$$\sin \frac{\varphi_{\min} + \gamma}{2} = n \sin \frac{\gamma}{2} .$$

In der Regel schreibt man

$$(13) \quad n = \frac{\sin \frac{\varphi_{\min} + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} .$$

Das ist die nach *Fraunhofer* benannte Formel. Danach lässt sich der Brechungsindex n des Prismas messen, indem man (bei Kenntnis des Winkels γ) den *minimalen* Ablenkwinkel φ_{\min} bestimmt.

3. Aufbau eines Prismenspektrometers²

Abbildung 3 zeigt das Schema eines Prismenspektrometers. Als Lichtquelle dient zum Beispiel eine Gasentladungslampe. Sie beleuchtet einen schmalen Spalt parallel zur brechenden Kante des Prismas. Das aus dem Spalt austretende Licht wird mit Hilfe einer Sammellinse (*Kollimatorlinse* in Abbildung 3) zu einem Bündel paralleler Strahlen zusammengefasst und tritt als solches durch das Prisma hindurch. Hinter dem Prisma durchläuft es eine zweite Linse (*Abbildungslinse* in der schematischen Darstellung), die in ihrer Brennebene ein Bild des Spalts erzeugt. Dieses betrachtet man mit Hilfe einer Lupe (einer weiteren Linse kurzer Brennweite), die auf der Netzhaut des Auges ein vergrößertes Bild des Spalts erscheinen lässt. Die Anordnung von Abbildungslinse und Lupe entspricht der von Objektiv und Okular beim Fernrohr. Es ist üblich, sie auch kurz als „Fernrohr“ zu bezeichnen. Die Kombination von Spalt und Kollimatorlinse wird ebenfalls abgekürzt und „Kollimator“ genannt.

Enthält das Licht nur eine einzige Wellenlänge, hat das „Bild“ bei ausreichend kleiner Spaltbreite eine Intensitätsverteilung, die der Beugungsfigur eines (Einfach-)Spalts entspricht. Da die Nebenmaxima der Beugungsfigur wegen ihrer geringen Intensität vom Auge nicht wahrgenommen werden, sieht man das Hauptmaximum der Intensitätsverteilung als farbige „Linie“ vor dem dunklen Hintergrund des Rauschens. Zur genauen Bestimmung der Position einer Linie enthält die Okularlupe ein Fadenzkreuz.

Das Fernrohr ist um die (senkrechte) Mittelachse des Prismas schwenkbar. Seine Winkelposition lässt sich an einem Teilkreis (Goniometer) am Rand eines Drehtischs ablesen. Ein Nonius erlaubt es, den Fernrohrwinkel mit einer Genauigkeit von $0,1^\circ$ zu bestimmen. In der Mitte des Drehtischs ist der Prismentisch mit dem Prisma angebracht. Er wird durch drei Gewindeschrauben mit eingebauten Abstandshaltern und den zugehörigen Muttern so befestigt, dass sich das Prisma in der Höhe der optischen Achse von Kollimator und Fernrohr befindet. Bei der Bestimmung Winkels zwischen Vorwärtsrichtung und abgelenktem Strahl ist zu beachten, dass Prisma und Drehtisch starr miteinander verbunden sind. Damit beim Schwenken des Fernrohrarms der Drehtisch (einschließlich Prisma) nicht verstellt wird, ist dieser arretierbar.

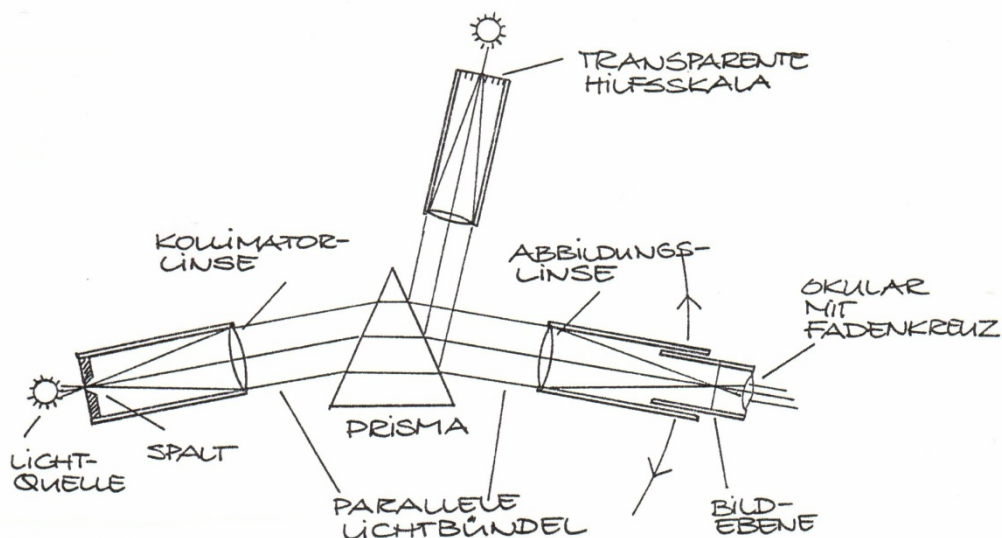


Abbildung 3 Schematischer Aufbau eines Prismenspektrometers mit Strahlengang. Die Kombination von Spalt und Kollimatorlinse wird in der Literatur vielfach "Kollimator" genannt, das Gerät zum Beobachten des Spektrums (Abbildungslinse und Okular) ist ein astronomisches (Linsen-)Fernrohr und wird deshalb im Prismenspektrometer auch so bezeichnet. Nicht gezeichnet ist der Teilkreis (das Goniometer), an dem der Ablenkwinkel abgelesen wird.

Angeregte Atome senden in der Regel Licht aus, das mehrere diskrete Wellenlängen enthält. Da der Brechungsindex des Prismas von der Wellenlänge abhängt (Dispersion), wird dieses Licht je nach Wellenlänge unter verschiedenen Winkeln abgelenkt. In der Bildebene erscheinen daher getrennte Linien unterschiedlicher Farbe, die für das jeweilige Atom charakteristisch sind (*Spektrallinien*). Abbildung 4 zeigt die Spektrallinien des Heliums.

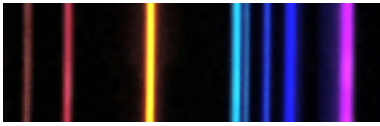


Abbildung 4 Spektrallinien des Helium. Die violette Linie ist mit bloßem Auge nicht sichtbar (Wellenlänge $\lambda = 388,9 \text{ nm}$).

Glühende (schwarze) Körper emittieren Licht mit einer zusammenhängenden Verteilung von Wellenlängen. Es umfasst infrarote Strahlung, das sichtbare Spektrum und ultraviolettes Licht. Das Prisma zerlegt das sichtbare Licht ähnlich wie ein Wassertropfen in die Farben des Regenbogens.

4. Auflösungsvermögen³

Im Linienspektrum eines Atoms kann man zwei Linien mit fast gleicher Wellenlänge in der Bildebene nicht mehr „auflösen“. Wir berechnen, wie klein der Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ zweier Linien sein darf, um sie noch als getrennt wahrzunehmen. Das *Auflösungsvermögen* wird in der Regel definiert als das Verhältnis $\lambda/\Delta\lambda$, wobei λ der Mittelwert der Wellenlängen beider Linien ist. Da sich die Wellenlängen nur wenig unterscheiden, kann man für λ auch eine der beiden Wellenlängen einsetzen. Es gilt also

$$(14) \quad \text{Auflösungsvermögen (Definition)} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} .$$

Die nachfolgende Überlegung orientiert sich an Abbildung 5. Im Strahlengang des Prismenspektrometers gibt es mehrere Blenden, von denen eine die Bündelbreite B des zur Abbildung benutzten Lichts begrenzt. Die beobachteten Spektrallinien sind die Hauptmaxima der Beugungsfiguren dieser Blende. Das erste Nebenminimum dieser Beugungsfigur befindet sich im Winkelabstand $\Delta\varphi \approx \lambda/B$ vom Hauptmaximum, wenn λ die zur Linie gehörende Wellenlänge ist. In Abbildung 5 ist die Intensitätsverteilung dieser Beugungsfigur als ausgezogene Linie dargestellt. Nach *Rayleigh* lässt sich eine Spektrallinie mit der Wellenlänge $\lambda \pm \Delta\lambda$ von einer Linie mit der Wellenlänge λ trennen, wenn das Hauptmaximum der Linie mit der (nach oben oder unten) abweichenden Wellenlänge $\lambda \pm \Delta\lambda$ in das erste Nebenminimum der Linie mit der Wellenlänge λ fällt. In Abbildung 5 ist dies für die nach unten abweichende Wellenlänge $\lambda - \Delta\lambda$ der Fall (gestrichelte Intensitätskurve).

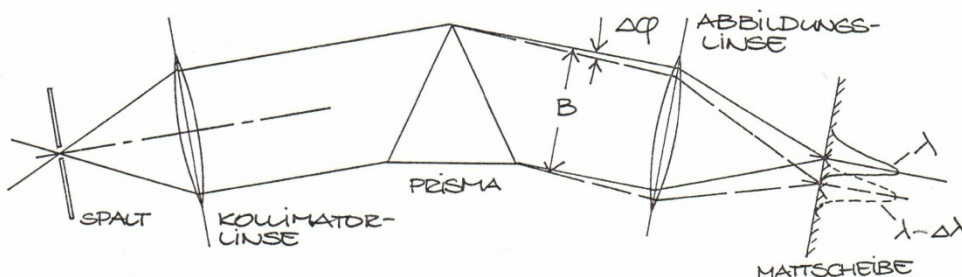


Abbildung 5 Rayleigh-Kriterium für die Auflösungsgrenze eines optischen Spektrometers

Der Winkelabstand der beiden gerade noch aufgelösten Linien ist dann, wie schon erwähnt,

$$(15) \quad \Delta\varphi \approx \frac{\lambda}{B}.$$

Der Ablenkwinkel φ des Prismas ist andererseits eine Funktion der Wellenlänge λ , also ist $\Delta\varphi$ abhängig von der Differenz $\Delta\lambda$ der Wellenlängen. Wir suchen deshalb einen Term für $\Delta\varphi$, der diese Abhängigkeit ausdrückt und setzen ihn gleich λ/B . Das Auflösungsvermögen erhalten wir, indem wir diese Gleichung nach $\lambda/\Delta\lambda$ umformen.

Der Einfachheit halber setzen wir symmetrischen Strahlengang voraus. In diesem Fall gilt Gleichung (11), also $\varphi = 2\alpha - \gamma$ und, da γ eine Konstante ist,

$$(16) \quad \Delta\varphi = 2\Delta\alpha.$$

Nach Gleichung (12) ist bei symmetrischem Strahlengang weiterhin $\gamma = 2\beta$. Damit wird das Brechungsgesetz $\sin\alpha = n\sin\beta = n\sin(\gamma/2)$. Durch Differenzieren erhält man

$$\cos\alpha d\alpha = dn \sin\frac{\gamma}{2},$$

also

$$d\alpha = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha} \cdot dn.$$

Die Änderung des Ablenkwinkels ist damit

$$(17) \quad \Delta\varphi = 2\Delta\alpha = 2 \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha} \cdot \Delta n = 2 \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\alpha} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \Delta\lambda.$$

Dabei ist $(dn/d\lambda)_\lambda$ die Dispersion des Prismas bei der Wellenlänge λ . Wird die gesamte Seitenfläche des Prismas (Abbildung 1) vom Lichtbündel ausgeleuchtet, ist $B = a \cos\alpha$. Aus der Geometrie ergibt sich $d/2 = a \sin(\gamma/2)$, so dass folgt

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{d}{2a} = \frac{d}{2B} \cos\alpha.$$

Damit wird Gleichung (17)

$$(18) \quad \begin{aligned} \Delta\varphi &= 2 \frac{\frac{d}{2B} \cos\alpha}{\cos\alpha} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \Delta\lambda \\ &= \frac{d}{B} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \Delta\lambda \end{aligned}$$

Nach (15) ist der Term auf der rechten Seite ungefähr gleich λ/B . Also folgt

$$(19) \quad \frac{\lambda}{B} \cong \frac{d}{B} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda \Delta\lambda.$$

Das Auflösungsvermögen ergibt sich damit zu

$$(20) \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \approx d \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda .$$

Es ist nur von der Basislänge d und der *Dispersion* ($dn/d\lambda$) des Materials abhängig, aus dem das Prisma besteht. Dazu eine grobe Abschätzung: Flintglas $F2$ hat die Standarddispersion $n_F - n_C = 0,017$. Die Wellenlängen der F - und C -Linien betragen 656 nm bzw. 486 nm, also ist die Dispersion $dn/d\lambda \approx 0,017/(656 - 486) \text{ nm} = 0,0001002 \text{ nm}^{-1}$. Für ein Prisma mit $d = 1 \text{ cm}$ Basislänge ist das Auflösungsvermögen dann $\lambda/\Delta\lambda = 10^{-2} \text{ m} \cdot 0,0001002 \text{ nm}^{-1} = 1002$. Das heißt, es ist $\Delta\lambda = \lambda/1002$. Damit lassen sich zum Beispiel die beiden gelben Hg -Linien (577,12 nm und 579,23 nm) gut trennen: Ihre Wellenlängen unterscheiden sich um $\Delta\lambda = 2,11 \text{ nm}$, das Prisma würde einen Unterschied von $\Delta\lambda = 587 \text{ nm}/1002 = 0,58 \text{ nm}$ noch erkennen.

Wird nicht die gesamte Seitenfläche des Prismas ausgeleuchtet, ist in Gleichung (20) die effektive Basislänge d_{eff} einzusetzen. Sie ergibt sich aus Abbildung 6. In diesem Fall wirkt ein Teil des Prismas als planparallele Platte, diese erzeugt keine Dispersion.

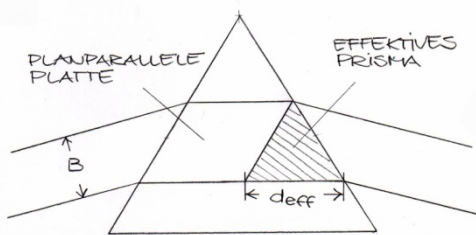


Abbildung 6 Definition der effektiven Basislänge d_{eff}

Gleichung (18) zeigt, dass sich bei einem Zuwachs $\Delta\lambda$ der Wellenlänge der Ablenkwinkel um einen Betrag $\Delta\varphi$ ändert, der proportional ist zur Dispersion $dn/d\lambda$ (das ist mehr als plausibel). Die Größe $(\Delta\varphi/\Delta\lambda) \approx (d\varphi/d\lambda)$ wird üblicherweise *Winkeldispersion* genannt. Es gilt also

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} = \frac{d}{B} \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda = \frac{1}{B} d \left(\frac{dn}{d\lambda} \right)_\lambda .$$

Mit Gleichung (20) folgt daraus

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} = \frac{1}{B} \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

oder

$$(21) \quad \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda} \right)_\lambda \approx B \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)_\lambda .$$

Diese Gleichung verknüpft das Auflösungsvermögen mit der Winkeldispersion des Prismas und der Bündelbreite des Strahls. Der Verlauf der Winkeldispersion ($d\varphi/d\lambda$) als Funktion von λ lässt sich

experimentell bestimmen, indem man φ für eine Reihe bekannter Spektrallinien (d.h. für eine Reihe bekannter Wellenlängen) misst. Aus der Ausgleichskurve durch die Messpunkte gewinnt man durch Anlegen der Tangente deren Ableitung $d\varphi/d\lambda$. Die Bündelbreite B , die zur Auflösung zweier Linien mit dem Wellenlängenunterschied $\Delta\lambda$ erforderlich ist, bestimmt man zum Beispiel mit einer Schieblehre, die man in den Strahlengang des Prismenspektrometers bringt. Auf diese Weise lässt sich Gleichung (21) experimentell bestätigen.

5. Messungen

5. 1 Justierung des Spektrometers

Zunächst ist die Kombination aus Abbildungslinse und Okular (das „Fernrohr“) auf unendlich einzustellen. Dazu muss das Prisma aus dem Strahlengang entfernt werden. Es wird ein ferner Gegenstand anvisiert und das Okular so verschoben, dass ein scharfes Bild erscheint. Bild und Fadenkreuz sollen in einer Ebene liegen, das heißt, sie sollen keine Parallaxe zeigen: beim Hin- und Herbewegen des Auges vor dem Okular soll sich das Bild nicht verschieben.

Als Nächstes stellt man den Abstand zwischen Spalt und Kollimatorlinse so ein, dass die Linse Parallellicht erzeugt. Das Prisma bleibt weiterhin aus dem Strahlengang herausgenommen. Man verschiebt den Spalteinschub, bis im auf unendlich eingestellten Fernrohr ein scharfes (und parallaxenfreies) Bild des Spaltes erscheint.

Schließlich wird das Prisma eingesetzt, und zwar so, dass die brechende Kante des Prismas parallel zur Spektrometerachse ausgerichtet ist. Das ist der Fall, wenn beim Beobachten eines Spektrums die Fadenkreuzmitte mit der Mitte der Spaltbilder zusammenfällt. Beim vorliegenden Gerät (Leybold Nr. 46721) wird der Prismenisch durch die Befestigungsschrauben in die vom Werk vorgesehene, richtige Position gebracht, so dass diese Justierung in der Regel nicht nötig ist.

5.2 Dispersionskurve⁴ $n(\lambda)$ des Prismenmaterials

Der Brechungsindex n des Prismenmaterials wird mit Hilfe von Gleichung (13) bestimmt. Dazu benötigt man die Werte von γ (Winkel an der brechenden Kante des Prismas) und φ_{\min} (minimaler Ablenkwinkel). Wir übernehmen aus dem Datenblatt des Herstellers $\gamma = 60^\circ$, müssen also nur φ_{\min} messen. Den minimalen Ablenkwinkel φ_{\min} bestimmen wir für verschiedene Wellenlängen λ und erhalten so einige Punkte der Dispersionskurve $n = n(\lambda)$. Das Minimum der Ablenkung für eine gegebene Wellenlänge (eine gegebene Spektrallinie) haben wir gefunden, wenn das im Fernrohr sichtbare Spaltbild der Linie bei kleinen Winkeländerungen des Drehtischs stehen bleibt. Da der Prismenisch mit dem Drehtisch starr verbunden ist, verändern wir durch diese Drehung den Einfallswinkel α_1 . Befinden wir uns im Minimum der Ablenkung und variieren α_1 , wird der Ablenkwinkel φ größer, unabhängig davon, in welcher Richtung α_1 verändert wird (pardon, das ist mehr als plausibel, so definiert man ein Minimum). Für die Praxis heißt das, kleine Drehungen des Tisches nach links oder rechts lassen das Bild im Fernrohr in die gleiche Richtung zurückwandern – nämlich zu größeren Ablenkungswinkeln hin. Es ist sinnvoll, den Fernrohrarm bei dieser Prozedur zu arretieren. Der Drehtisch (einschließlich Prismenisch) muss natürlich schwenkbar sein, seine Arretierung ist zu lösen.

Die Dispersionskurve ermitteln wir, indem wir n für die Wellenlängen einiger Linien des Heliums messen. Für jede dieser Linien wird zunächst nach dem soeben beschriebenen Verfahren das Minimum der Ablenkung bestimmt. Es empfiehlt sich, den Drehtisch unmittelbar danach zu arretieren. Sodann wird das Fernrohr auf die gerade interessierende Linie geschwenkt (die Linie mit dem Fadenkreuz zur Deckung bringen) und der zugehörige Teilkreiswinkel notiert. Danach wird das Prisma entfernt und das Fernrohr direkt auf den beleuchteten Spalt gerichtet. Auch hier sollte das Spaltbild im Fadenkreuz sichtbar werden. Der jetzt am Teilkreis abgelesene Winkel definiert die Vorwärtsrichtung. Die Differenz zum vorher bestimmten Winkel, unter dem die Linie erschien, ist der minimale Ablenkwinkel φ_{\min} .

Wir setzen die gemessenen Werte von φ_{\min} in Gleichung (13) ein und erhalten die in Tabelle 1 aufgeführten Brechungsindizes n . Abbildung 7 zeigt die Tabellenwerte, aufgetragen als Messpunkte

Tabelle 1 Messwerte des minimalen Ablenkwinkels φ_{\min} (dritte Spalte) für die Wellenlängen λ einiger Spektrallinien des Heliums. In der vierten Spalte sind die daraus nach Gleichung (13) berechneten Brechungsindizes n aufgeführt. Die Werte von λ^{-2} in der dritten Spalte werden weiter unten benötigt.

He-Linie	λ/nm	$\lambda^{-2}/\mu\text{m}^{-2}$	$\varphi_{\min}/\text{Grad}$	$n(\lambda)$
rot	667,8	2,2423	$47,6 \pm 0,3$	$1,6139 \pm 0,0031$
gelb	587,6	2,8962	48,2	1,6208
grün	501,6	3,9745	$49,2 \pm 0,2$	$1,6298 \pm 0,0015$
blau	471,3	4,5020	49,5	1,6333
blau-violett	447,1	5,0025	$50,1 \pm 0,2$	$1,6387 \pm 0,0029$

in einem Koordinatensystem mit der Wellenlänge λ als horizontaler Achse. Eingezeichnet ist auch die nach der Literatur erwartete Dispersionskurve $n = n(\lambda)$ für die benutzte Glassorte *Flintglas F2*. Sie gibt den Verlauf der Messpunkte innerhalb der Fehlergrenzen gut wieder.

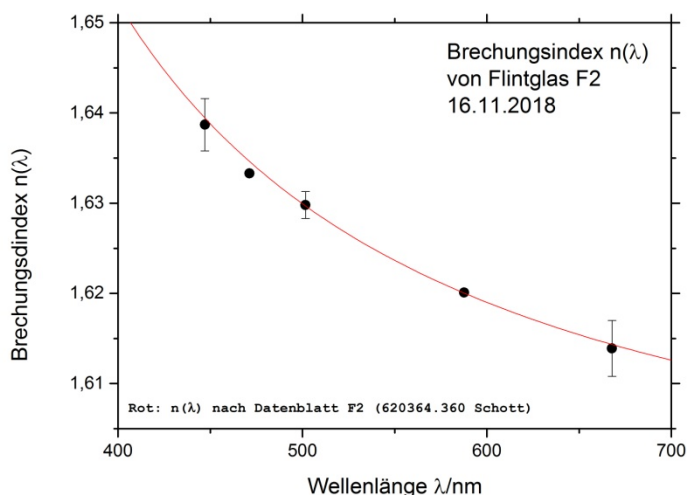


Abbildung 7 Messwerte (gefüllte Kreise) des Brechungsindex n für Flintglas F2 als Funktion der Wellenlänge λ (Dispersionskurve). Ausgezogene rote Linie: Berechnete Dispersionskurve $n = n(\lambda)$ mit den in der Literatur (Datenblatt F2, 620364.360 von Schott) angegebenen Sellmeier-Parametern, siehe Text.

Die nach der Literatur erwartete Dispersionskurve wird im vorliegenden Fall aus der üblichen, nach Sellmeier parametrisierten Gleichung

$$(22) \quad n^2 - 1 = \frac{B_1 \lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

gewonnen. Die Parameter $B_1..B_3$ und $C_1..C_3$ sind dem Datenblatt F2, Nr. 620364.360 der Firma Schott⁵ entnommen und in Tabelle 2 aufgeführt. Sie setzen voraus, dass die Wellenlänge λ in der Einheit μm eingesetzt wird.

Tabelle 2 Sellmeier-Parameter für Flintglas (F2) in Gleichung (22), nach Datenblatt F2, Nr. 620364.360 der Firma Schott. Bei der Berechnung nach Gleichung (22) ist λ in der Einheit μm einzusetzen.

Parameter	Wert
B_1	1,34533
B_2	0,20907
B_3	0,93736
C_1	0,0099774 μm^2
C_2	0,047045 μm^2
C_3	111,8868 μm^2

In den Physikpraktika der Hochschulen wird oft die vereinfachte, von Cauchy vorgeschlagene Dispersionsformel

$$n(\lambda) = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \right)$$

mit den Parametern A, B und C verwandt. In unserem Wellenlängenbereich ist zudem $C/\lambda^4 \ll B/\lambda^2$, so dass sie sich weiter vereinfacht zu

$$(23) \quad n(\lambda) = A \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} \right) .$$

Daher sollten die Messpunkte von n , als Funktion von $1/\lambda^2$ aufgetragen, auf einer ansteigenden Geraden liegen. Wie Abbildung 8 zeigt, ist das tatsächlich der Fall. Die Gerade in der Abbildung ist eine Näherung

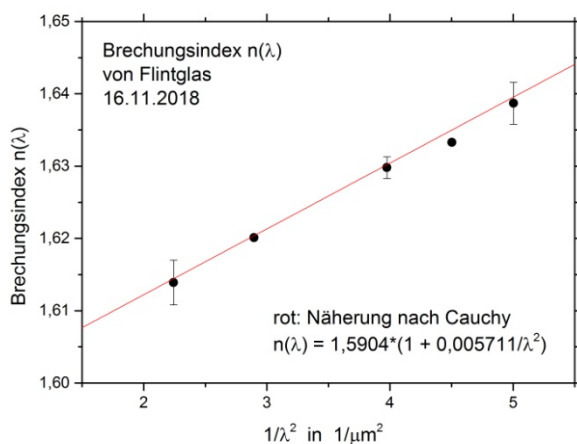


Abbildung 8 Messpunkte $n(\lambda)$ der vorliegenden Messung (Tabelle 1), aufgetragen als Funktion von $1/\lambda^2$. Die Punkte liegen, wie Gleichung (23) angibt, auf einer ansteigenden Geraden.

an die „genaue“ Dispersionskurve nach Gleichung (22). Sie lautet

$$n(\lambda) = 1,5904 (1 + 0,005711/\lambda^2)$$

und weicht im hier untersuchten Wellenlängenbereich um weniger als $\pm 0,03\%$ von den nach (22) berechneten Werten ab. Aus Abbildung 8 geht hervor, dass auch bei dieser Art der Auswertung Experiment und Theorie übereinstimmen.

5.3 Auflösungsvermögen

Nach Gleichung (21) ist das Auflösungsvermögen das Produkt aus der Bündelbreite B des Strahls, der das Prisma beleuchtet, und der Winkeldispersion $(d\varphi/d\lambda)_\lambda$ bei der Wellenlänge λ . Diese Beziehung soll experimentell bestätigt werden. Wir wählen dazu aus dem Spektrum eines Atoms zwei nahe beieinander liegende Spektrallinien (ein Liniendoublett) und messen zunächst die Bündelbreite B , die mindestens benötigt wird, um die beiden Linien zu trennen. Ein geeignetes Liniendoublett stellen die grünen *Neon*-Linien dar. Ihre Wellenlängen sind $\lambda_1 = 533,08$ nm und $\lambda_2 = 534,11$ nm (Mittelwert $\lambda = 533,6$ nm). Um sie zu trennen, benötigt man das Auflösungsvermögen

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{533,6}{534,11 - 533,08} = \frac{533,6}{1,03} = 518 .$$

Zur Bestimmung von B benutzen wir einen Messschieber („Schieblehre“). Dessen (Außen-)Messschenkel bringen wir zwischen Kollimator und Prisma in den Strahlengang ein. Die Messschenkel sind parallel zum Spalt auszurichten. Wir blicken durch das Okular und verringern dabei die Spanne der Messschenkel solange, bis die Linien ineinander übergehen. Die zugehörige Spanne ist die gesuchte Bündelbreite B . Der Wert hängt natürlich vom Sehvermögen des Experimentators ab, ist aber als Näherung brauchbar. Mein persönlicher Wert ist

$$B = (2,5 \pm 0,25) \text{ mm.}$$

Die Winkeldispersion messen wir mit Hilfe der Linien des *Helium*-Spektrums. In Tabelle 3 sind die Wellenlängen der dazu herangezogenen Linien und die Winkel φ^* aufgeführt, unter denen sie am Teilkreis des Spektrometers erscheinen. Der Nullpunkt der Teilkreisskala ist hier unerheblich. Da sich φ^* vom Ablenkwinkel φ nur durch eine additive Konstante unterscheidet, fällt diese bei der Bildung der Ableitung $(d\varphi/d\lambda)_\lambda$ weg.

Tabelle 3 Wellenlängen der Spektrallinien des Heliums(He) und Winkel φ^* , unter denen sie am Teilkreis des Spektrometers erscheinen.

Farbe	Intensität	λ/nm	φ^*/Grad
dunkelrot	schwach	706,54	-1,35
rot	stark	667,82	-1,15
gelb	sehr stark	587,56	-0,50
grün	schwach	504,77	0,35
grün	mittel	501,57	0,50
blaugrün	mittel	492,19	0,60
blau	schwach	471,31	1,00
blau-violett	stark	447,15	1,55
violett	schwach	438,79	1,75

Abbildung 9 zeigt die Messpunkte von φ^* , aufgetragen als Funktion von λ . An die Punkte wird der Graph einer Exponentialfunktion

$$(22) \quad \varphi^*(\lambda) = A \cdot \exp\left(-\frac{\lambda}{B}\right) + C$$

angepasst. Aus den best fit-Parametern $A = 75,34$, $B = 144,59$ und $C = -1,888$ folgt als Ableitung an der Stelle $\lambda = 533,6 \text{ nm}$ der Wert $(d\varphi^*/d\lambda)_{533,6 \text{ nm}} = (d\varphi/d\lambda)_{533,6 \text{ nm}} = -0,013008 \text{ Grad/nm}$. Im Bogenmaß ist damit (das negative Vorzeichen ist durch die Zählrichtung der Winkel gegeben, also unerheblich)

$$(d\varphi/d\lambda)_{533,6 \text{ nm}} = 0,013008 \cdot 0,01745 \text{ nm}^{-1} = 2,27 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}.$$

Aus den Zahlenwerten von B und $(d\varphi/d\lambda)_{533,6 \text{ nm}}$ ergibt sich als experimentelle Auflösungsgrenze

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = B \cdot \frac{d\varphi}{d\lambda} = (2,5 \pm 0,25) \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 2,27 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1} = 568 \pm 57.$$

Sie ist zu vergleichen mit dem theoretischen Wert $\lambda/\Delta\lambda = 518$. Die mäßige Übereinstimmung sollte nicht überraschen – bei der Bestimmung von B ist subjektive Wahrnehmung im Spiel.

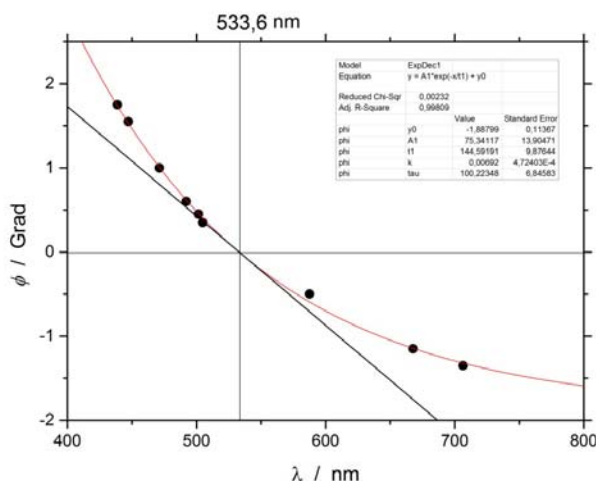


Abbildung 9 Teilkreiswinkel φ^* als Funktion der Wellenlänge λ . Messpunkte und angepasste Kurve (rot). Einzelheiten siehe Text. Der Winkel φ^* unterscheidet sich vom Ablenkwinkel φ nur durch eine additive Konstante. Bei der Bildung der Ableitung $(d\varphi/d\lambda)$ fällt diese Konstante weg. Die schwarz gezeichnete Gerade ist die Tangente an die Kurve an der Stelle $\lambda = 533,6 \text{ nm}$. Deren Steigung ist (abgesehen vom Vorzeichen) die gesuchte Größe $(d\varphi/d\lambda)_{533,6 \text{ nm}} = 2,27 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$.

5.4 Wellenlänge

Wellenlängen von Spektrallinien bestimmt man in der Regel durch Vergleich mit einem Spektrum, dessen Linien vorher vermessen wurden. Deren Wellenlängen dienen dann als Eichmarken auf der Skala des Spektrometers. Wir führen dieses Verfahren am Beispiel der Wasserstofflinien H_α , H_β und H_γ durch. Als Eichspektrum benutzen wir das Spektrum des Heliums mit den Linien, die in Tabelle 3 aufgeführt sind. Dazu blenden wir mit Hilfe eines Spiegels eine transparente Hilfsskala in das Gesichtsfeld des Okulars ein (Abbildung 3) und notieren die Position der He-Linien auf dieser

Skala. Die Position der Linien werde mit s bezeichnet, ihre Einheit geben wir in Skalenteilen (Skt) an. Das Ergebnis zeigt Tabelle 4. Da es sich um dieselben He -Linien handelt wie in Tabelle 3, stimmen die drei linken Spalten in beiden Tabellen überein.

Tabelle 4 Eichmarken s auf der Hilfsskala des Spektrometers mit den zugehörigen Wellenlängen. Sie markieren die Position der Spektrallinien des Heliums (He), deren Wellenlängen als bekannt vorausgesetzt werden. Die Spektrallinien sind dieselben wie in Tabelle 3.

Farbe	Intensität	λ /nm	s /Skt
dunkelrot	schwach	706,54	5,7
rot	stark	667,82	6,1
gelb	sehr stark	587,56	7,15
grün	schwach	504,77	8,9
grün	mittel	501,57	9,0
blaugrün	mittel	492,19	9,25
blau	schwach	471,31	9,9
blau	stark	447,15	10,85
violett	schwach	438,79	11,2

In Abbildung 10 ist die Position s der Linien als Funktion der Wellenlänge λ aufgetragen. An die Messpunkte wird wiederum eine Kurve der Form von Gleichung (22) angepasst. Sie liefert

$$\lambda(s)/\text{nm} = 1760,95 \cdot \exp(-s/3,40774) + 374,482$$

Mit Hilfe dieser Eichkurve werden die Positionen der drei Wasserstofflinien in deren Wellenlängen

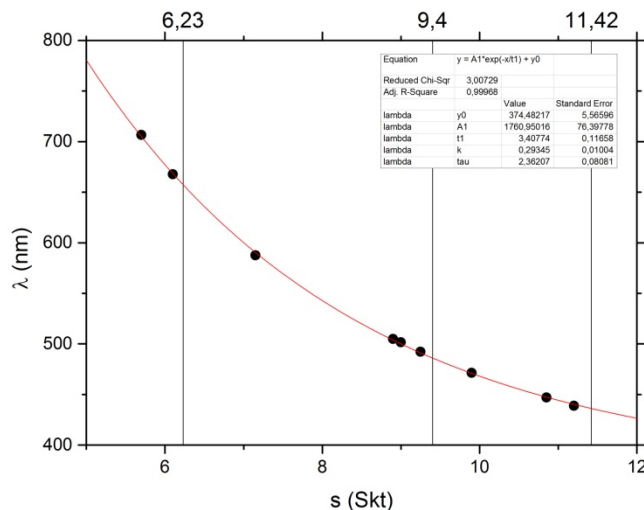


Abbildung 10 Wellenlänge λ der Spektrallinien des Heliums als Funktion ihrer Position s auf der Hilfsskala. An die Messpunkte ist eine Kurve der Form von Gleichung (22) angepasst. Die senkrechten Linien kennzeichnen die Positionen der Wasserstofflinien H_{α} , H_{β} und H_{γ} . Die Werte der Ausgleichskurve $\lambda(s)$ an diesen Stellen sind die Wellenlängen dieser Linien (Tabelle 5, dritte Spalte).

umgerechnet. Das Ergebnis zeigt Tabelle 5. Der Fehler von s wird abgeschätzt zu $\pm 0,05$ bzw. $\pm 0,10$ Skalenteilen. Daraus resultiert eine Unsicherheit von weniger als $\pm 1\%$ in den Werten der Wellenlänge.

Tabelle 5 Wellenlängen der H_α , H_β und H_γ -Linien. Messwerte in der dritten, theoretische Werte in der vierten Spalte.

Linie	s/s_{kt}	λ/nm	$\lambda_{\text{theor}}/\text{nm}$
H_α	$6,23 \pm 0,05$	$657,5 \pm 4,2$	656,3
H_β	$9,40 \pm 0,05$	$486,1 \pm 1,6$	486,1
H_γ	$11,42 \pm 0,10$	$436,2 \pm 1,8$	434,0

6. Fazit

Das Verfahren zur Bestimmung des minimalen Ablenkwinkels ist nicht frei von subjektiver Wahrnehmung (siehe Abschnitt 5.2). Trotz dieser Unsicherheit sind die aus den Daten von φ_{min} gewonnenen Brechungsindizes n offenbar mit den gängigen Werten verträglich: Die Messpunkte folgen erstaunlich gut der Dispersionskurve, die sich aus den Literaturwerten der Sellmeier-Parameter in Tabelle 2 ergibt (Abbildung 7). Auch die Beziehung (21) zwischen Auflösungsvermögen $\lambda/\Delta\lambda$, Bündelbreite B und Winkeldispersion $d\varphi/d\lambda$ konnte mit einer Genauigkeit von $\pm 10\%$ verifiziert werden. Die Wellenlängen der Wasserstofflinien wurden durch Vergleich mit den (als bekannt vorausgesetzten) Wellenlängen der Heliumlinien bestimmt. Dass sie mit einer Unsicherheit von weniger als $\pm 1\%$ angegeben werden können (Tabelle 5), zeigt den Vorteil dieser Messmethode – insgesamt betrachtet ein Experiment mit viel Physik und guten Ergebnissen.

Literatur und Anmerkungen

¹ Gerthsen, *Physik* (D. Meschede), S. 487 (21. Auflage, J. Springer 2001), Kapitel 9.1.5 Prismen

² Es gibt eine Reihe von Anleitungen zu physikalischen Praktika an Hochschulen, die hierzu und zu den nachfolgend beschriebenen Experimenten Auskunft geben, z. B.

(1) Walcher, Wilhelm: *Praktikum der Physik*. B. G. Teubner-Verlag, Stuttgart, Leipzig, Wiesbaden, 8. Auflage, 2004.

(2) Praktikum I Versuch 33 (Physikalisches Anfängerpraktikum Universität Heidelberg): www.physi.uni-heidelberg.de/.../AP/.../33_Prismenspektrometer_07_2012.pdf

(3) Optik, Prismenspektrometer (Praktikum RWTH Aachen): accms04.physik.rwth-aachen.de/~praktapp/teil2/anleitung2/v2_2.pdf

³ Gerthsen, *Physik* (D. Meschede), S. 528 (21. Auflage, J. Springer 2001), Kapitel 10.1.6 Auflösungsvermögen eines Spektrographen

⁴ Der Begriff *Dispersion* wird mehrfach benutzt. Merke: (1) der Graph der Funktion $n = n(\lambda)$ heißt *Dispersionskurve*, (2) deren Ableitung $(dn/d\lambda)_\lambda$ ist die *Dispersion* bei der Wellenlänge λ , (3) die Größe $d\varphi/d\lambda$ wird üblicherweise *Winkeldispersion* genannt.

⁵ Schott, *Optisches Glas Datenblätter*, www.schott.com/.../schott-optical-glass-collection-datasheets-july-2015-de.pdf