

Rayleigh-Streuung als Grenzfall der Lorenz-Mie-Streuung für $kR \rightarrow 0$

Der (totale) Wirkungsquerschnitt für die Streuung einer elektromagnetischen Welle an einer dielektrischen Kugel (Radius R , Brechungsindex n) ergibt sich mit Hilfe der Partialwellenmethode zu

$$(1) \quad \sigma = \frac{2\pi}{k^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2) .$$

Dabei sind a_l und b_l die Partialwellenkoeffizienten der gestreuten Welle und

$$(2) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

ist die Wellenzahl der einlaufenden Welle ($\lambda =$ Wellenlänge). Die Koeffizienten a_l und b_l wurden zum ersten Mal von *Mie*¹ berechnet (*Mie-Koeffizienten*), sie lauten²

$$(3) \quad \begin{aligned} a_l &= \frac{\psi_l(x) \psi_l'(nx) - n \psi_l(nx) \psi_l'(x)}{\xi_l(x) \psi_l'(nx) - n \psi_l(nx) \xi_l'(x)} \\ b_l &= \frac{\psi_l(x) n \psi_l'(nx) - \psi_l(nx) \psi_l'(x)}{\xi_l(x) n \psi_l'(nx) - \psi_l(nx) \xi_l'(x)} \end{aligned}$$

Dabei ist x eine Abkürzung für den Größenparameter kR , also

$$(4) \quad x = kR .$$

Mit ψ und ξ sind die Riccati-Bessel-Funktionen

$$(5) \quad \begin{aligned} \psi_l(s) &= s \cdot j_l(s) \\ \xi_l(s) &= s \cdot h_l^{(1)}(s) \end{aligned}$$

bezeichnet, die sich aus den sphärischen Bessel- bzw. Hankel-Funktionen³

$$(6) \quad \begin{aligned} j_l(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l \pm 1/2}(x) \\ h_l^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l \pm 1/2}^{(1)}(x) \end{aligned}$$

ergeben. Die Striche in (3) bedeuten die Ableitungen nach dem jeweiligen Argument. Aus dem nach Mie berechneten Wirkungsquerschnitt folgt beispielsweise, dass die Streuung an Wassertropfen mit einem Radius $R = 10 \mu\text{m}$ praktisch nicht von der Wellenlänge des einfallenden Lichts abhängt. Tropfen dieser Größe sind typische Wolkenpartikel, sie streuen alle im Sonnenlicht vorhandenen Wellenlängen mit gleicher Wahrscheinlichkeit und ergeben so das vertraute Weiß der Wolken. Es ist üblich, aber nicht immer richtig, wellenlängenunabhängige Streuung generell als *Mie-Streuung* zu bezeichnen.

Eine andere Art Streuung, die in der Atmosphäre beobachtet wird, ist mit dem Namen *Rayleigh* verknüpft. *Rayleigh-Streuung*⁴ bezeichnet die Streuung an Partikeln, die deutlich kleiner sind als die Wellenlänge des Lichts ($R \leq 0,1 \mu\text{m}$). Ihr Wirkungsquerschnitt ist umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Wellenlänge. Blaues Licht wird wegen seiner kurzen Wellenlänge stärker gestreut als langwelliges, rotes Licht. Rayleigh-Streuung findet beispielsweise statt an den Stickstoff- und Sauerstoffmolekülen der Atmosphäre. Aus dem Licht der Sonne wird dabei vorzugsweise der blaue Anteil herausgestreut. Beim Blick in den wolkenlosen Himmel sehen wir das Streulicht, das bekannte Himmelsblau.

Hier soll nun gezeigt werden, dass der Wirkungsquerschnitt für Mie-Streuung im Fall kleiner Größenparameter x gegen den $1/\lambda^4$ -Querschnitt der Rayleigh-Streuung geht. Zunächst kann man voraussetzen, dass für $x < 1$ der größte Beitrag zum Wirkungsquerschnitt von der Partialwelle mit $l = 1$ geliefert wird. Damit reduziert sich die Summe in (1) auf die Terme mit a_1 und b_1 , und die Funktionen ψ und ξ können, wiederum wegen $x < 1$, durch

$$(7) \quad \begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} \\ \psi_1'(x) &= \frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15} \\ \xi_1(x) &= \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} + \frac{i}{x} - \frac{ix}{2} \\ \xi_1'(x) &= \frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15} - \frac{i}{x^2} - \frac{i}{2} \end{aligned}$$

angenähert werden⁵. Damit folgt

$$a_1 = \frac{\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30}\right)\left(\frac{2nx}{3} - \frac{2n^3x^3}{15}\right) - n\left(\frac{n^2x^2}{3} - \frac{n^4x^4}{30}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15}\right)}{\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} - \frac{i}{x} - \frac{ix}{2}\right)\left(\frac{2nx}{3} - \frac{2n^3x^3}{15}\right) - n\left(\frac{n^2x^2}{3} - \frac{n^4x^4}{30}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15} + \frac{i}{x^2} - \frac{i}{2}\right)}$$

$$b_1 = \frac{\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30}\right)n\left(\frac{2nx}{3} - \frac{2n^3x^3}{15}\right) - \left(\frac{n^2x^2}{3} - \frac{n^4x^4}{30}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15}\right)}{\left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{30} - \frac{i}{x} - \frac{ix}{2}\right)n\left(\frac{2nx}{3} - \frac{2n^3x^3}{15}\right) - \left(\frac{n^2x^2}{3} - \frac{n^4x^4}{30}\right)\left(\frac{2x}{3} - \frac{2x^3}{15} + \frac{i}{x^2} - \frac{i}{2}\right)}$$

und weiter⁶

$$a_1 = \frac{\frac{2}{9}nx^3(1-n^2) + O(x^5)}{-i\frac{1}{3}n(n^2+2) + O(x^3)} = -i\frac{2}{3}x^3\frac{n^2-1}{n^2+2} + O(x^5)$$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{45}n^2x^5(1-n^2) + O(x^7)}{-in^2 + O(x^2)} = -i\frac{1}{45}x^5(n^2-1) + O(x^7)$$

Der Wirkungsquerschnitt (1) ist damit näherungsweise

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma(x \rightarrow 0, l=1) &= \frac{2\pi}{k^2} (2 \cdot 1 + 1)(|a_1|^2 + |b_1|^2) = \frac{2\pi}{k^2} \cdot 3 \cdot \left[\frac{4}{9}x^6 \left| \frac{n^2-1}{n^2+2} \right|^2 + O(x^{10}) \right] \\ &\cong \frac{8\pi}{3} \frac{(kR)^6}{k^2} \left| \frac{n^2-1}{n^2+2} \right|^2 \\ &\cong \frac{8\pi}{3} k^4 R^6 \left| \frac{n^2-1}{n^2+2} \right|^2 \end{aligned}$$

Wegen $k = 2\pi/\lambda$ ist dies der $1/\lambda^4$ -Querschnitt der Rayleigh-Streuung. In Abbildung 1 ist der Mie-Querschnitt (exakte Rechnung) für kleine x der Rayleigh-Näherung (Gleichung 8) gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass beide Querschnitte für $x = kR < 0,8$ recht gut übereinstimmen.

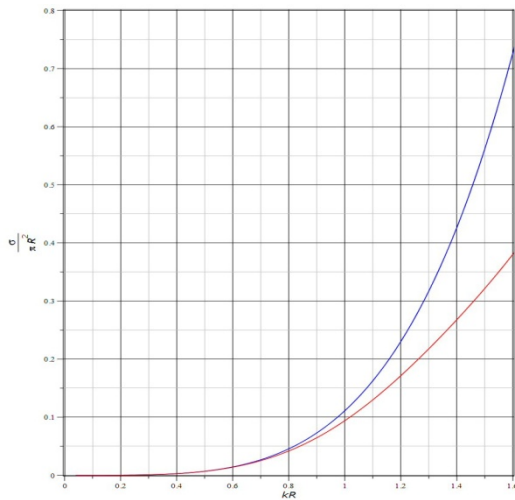


Abbildung 1 Wirkungsquerschnitt (dividiert durch den geometrischen Partikelquerschnitt) für Lorenz-Mie- und Rayleigh-Streuung im Bereich kleiner Größenparameter x . Brechungsindex $n = 1.33$ (Wassertropfen). Rot: Lorenz-Mie-Streuung, blau: Rayleigh-Streuung. Für $x < 0.8$ stimmen die Querschnitte recht gut überein.

In diesem Bereich ist im Übrigen der (totale) Streuquerschnitt deutlich kleiner als der geometrische Querschnitt des Streuobjekts. Zu berechnen wäre jetzt noch der differentielle Querschnitt für die Rayleigh-Streuung. Das soll an anderer Stelle geschehen.

Anmerkungen

¹ Mie, Gustav: *Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen*. [Annalen der Physik](#) Folge 4, Bd. 25, 1908, S. 377–445, [doi:10.1002/andp.19083300302](https://doi.org/10.1002/andp.19083300302)..... siehe z. B. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013, S. 787, dort Kap. 21.5.2: *Mie Scattering from a Dielectric Sphere*.

Schon 1890 (18 Jahre vor Mie) gelangte der dänische Physiker Ludvig Lorenz zu denselben Ergebnissen wie Mie. Diese Tatsache war lange Zeit vergessen, ist aber heute gesichert.

² z. B. García-Cámara, Braulio: Ph.D. Thesis, Santander, 2010, Kap. 2 – Theoretical Overview www.tesisenred.net/bitstream/handle/.../1de8.BGCcap2.pdf, siehe auch Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013, S. 787

³ siehe mathematische Formelsammlungen, z. B. *L. Råde und B. Westergren, Springers Mathematische Formeln* [RadW 96], oder *I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew et al., Taschenbuch der Mathematik* [BroS 93]

⁴ siehe z. B. Zangwill, *Modern Electrodynamics*, Cambridge University Press, 2013

⁵ siehe z. B. *L. Råde und B. Westergren, Springers Mathematische Formeln* [RadW 96], S. 273

⁶ Der Term der Ordnung x^7 im Zähler von b_1 ergibt sich aus in (7) nicht aufgeführten Reihengliedern.