

### 1. Einleitung

Im Physikunterricht hätte ich den Versuch gerne vorgeführt: den (mehr oder weniger) direkten Nachweis des Verschiebungsstroms (engl. displacement current) in einem Kondensator. Offenbar war ich nicht clever genug, mir eine passende Messanordnung zu überlegen. Denn das Experiment, das Sanyal und Chakrabarty<sup>1</sup> vorschlagen, ist verblüffend einfach konzipiert und problemlos aufzubauen – die Idee dazu hätte auch mir einfallen können. Die von den Autoren angegebenen Messdaten stimmen jedoch nicht mit der Theorie überein. Eine Begründung dafür wird genannt, ist aber zum Teil unbefriedigend. Ich habe deshalb versucht, das Experiment nachzubauen und eigene Messungen auszuführen.

### 2. Grundlage des Experiments

Nach dem Ampere'schen Gesetz (einschließlich der von Maxwell stammenden Erweiterung) ist das Linienintegral der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Weges gleich der Summe aus den Leitungs- und Verschiebungsströmen, die durch die vom Integrationsweg begrenzte Fläche hindurchtreten. Die entsprechende Gleichung lautet (Bezeichnungen wie üblich:  $\mathbf{B}$  für die magnetische,  $\mathbf{E}$  für die elektrische Feldstärke und  $\mathbf{J}$  für die Stromdichte des Leitungsstroms – alle Größen fett gedruckt, da es sich um Vektoren handelt)

$$(1) \quad \oint_S \mathbf{B} ds = \mu_0 \int \mathbf{J} d\mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} d\mathbf{A} .$$

Das Wegelement  $ds$  und die Flächenelemente  $d\mathbf{A}$  sind ebenfalls Vektoren und müssen mit den Feldstärken bzw. mit der Stromdichte *skalar* multipliziert werden. Links steht das Linienintegral der magnetischen Feldstärke, genommen über dem (geschlossenen) Weg  $S$ , rechts das Flächenintegral der Leitungsstromdichte und als zweiter Summand der hier interessierende Verschiebungsstrom. Er ist die zeitliche Änderungsrate des Flächenintegrals der elektrischen Feldstärke. Das Integral erstreckt sich über die Fläche, die vom Weg  $S$  umfasst wird. Diese von  $S$  umfasste Fläche kann beliebig geformt sein.

Unser Experiment spielt sich zwischen den Platten eines Plattenkondensators ab, mit Luft als Dielektrikum. Dort gibt es keinen Leitungsstrom, daher entfällt der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (1). Um die Existenz des zweiten Terms – des Verschiebungsstroms – nachzuweisen, müsste man zeigen, dass eine zeitliche Änderung des elektrischen Feldes im Kondensator ein Magnetfeld erzeugt. Das Problem besteht also darin, von diesem Magnetfeld zu zeigen, dass es mit der zeitlichen Ableitung der elektrischen Feldstärke im Kondensator korreliert ist. Die Idee ist, den Nachweis für das Magnetfeld durch Induktion zu erbringen: Man lässt die Feldlinien des Magnetfeldes durch eine Leiterschleife hindurchtreten und damit in der Leiterschleife eine Spannung induzieren. Induktion setzt bekanntlich voraus, dass sich die Feldstärke des Magnetfeldes zeitlich ändert. Leitet man Gleichung (1) auf beiden Seiten nach der Zeit ab, erkennt man, dass dies eine von Null verschiedene zweite Ableitung der elektrischen Feldstärke erfordert. Das elektrische Feld des Kondensators muss daher ein Wechselfeld sein, dessen Feldstärke sich zeitlich entsprechend ändert. Diese Bedingung ist problemlos erfüllbar: Man legt an die Platten des Kondensators eine sinusförmige Wechselspannung. Variiert man die Frequenz der Wechselspannung, lässt sich die Korrelation zwischen elektrischer und magnetischer Feldstärke untersuchen.

### 3. Messanordnung

Die Messanordnung besteht im Wesentlichen aus einem Kondensator mit parallelen, kreisförmigen Platten (Radius  $a$ ). Als Platten benutze ich einseitig Kupfer-kaschiertes Platinenmaterial, wobei die

Seite mit der Kupferschicht in das Innere des Kondensators zeigt. Die Platten werden auf Abstand gehalten durch drei Plastikbolzen der Länge  $d$ . Im Kreismittelpunkt der unteren Platte ist ein Kupferdraht angelötet, der in der Höhe  $h$  rechtwinklig abgebogen ist und radial nach außen geführt wird. Zusammen mit der Kupferschicht des Kondensator-Bodens bildet er die oben genannte Leiterschleife. Sie hat demnach genau eine Windung und umfasst eine Rechteckfläche der Länge  $a$  und Breite  $h$ .

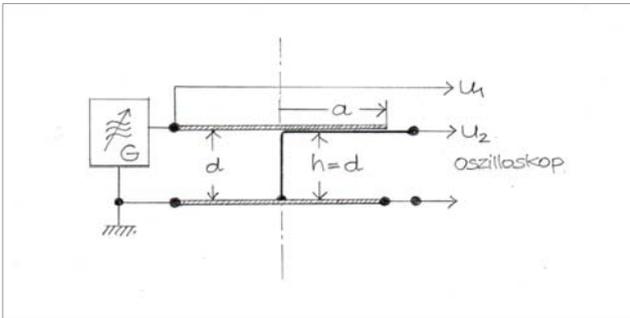


Abbildung 1 Schematische Skizze der Messanordnung (Seitenansicht des Kondensators). Radius der kreisförmigen Platten  $a = 10$  cm, Plattenabstand  $d = 2$  cm. Die Höhe  $h$  der Leiterschleife ist in der vorliegenden Arbeit gleich dem Plattenabstand, also wie in der Skizze eingezeichnet  $h = d$ . Sanyal und Chakrabarty<sup>1</sup> wählten  $h = d/2$ .

In der von Sanyal und Chakrabarty<sup>1</sup> benutzten Anordnung ist  $h = d/2$ , der waagerechte Teil des Kupferdrahts verläuft somit genau in der Mitte zwischen den Kondensator-Platten. In meiner Anordnung nimmt die Leiterschleife den gesamten Zwischenraum zwischen den Platten ein, also ist in der vorliegenden Arbeit  $h = d$  (Abbildung 1).

### 3. Theorie

Im Experiment wird an die Platten des Kondensators die Spannung  $U_1 \exp(j\omega t)$  gelegt ( $U_1 =$  Spannungsamplitude,  $\omega =$  Kreisfrequenz der Wechselspannung,  $t =$  Zeit). Daher bildet sich zwischen den Platten ein homogenes elektrisches Feld aus mit der Feldstärke

$$(2) \quad \mathbf{E} = \mathbf{e}_z \frac{U_1}{d} e^{j\omega t} .$$

Dabei rechnen wir wegen der Zylindersymmetrie der Anordnung in Zylinderkoordinaten  $(r, \varphi, z)$ , siehe Abbildung 1. Aus demselben Grund wählen wir als Weg  $S$  in Gleichung (1) den Kreis um die Zylinderachse mit Radius  $r$ . Auf diesem Kreis ist die in  $\varphi$ -Richtung zeigende magnetische Feldstärke konstant, also gilt

$$(3) \quad \oint_S \mathbf{B} ds = 2\pi r B_\varphi .$$

Auf der rechten Seite von Gleichung (1) bilden wir zunächst

$$(4) \quad \int_0^a \mathbf{E} d\mathbf{A} = \frac{U_1}{d} e^{j\omega t} \cdot \pi r^2 ,$$

woraus sich der Verschiebungsstrom ergibt zu

$$(5) \quad \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} d\mathbf{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} j \omega e^{j\omega t} .$$

Nach Gleichung (1), erhält man

$$(6) \quad 2\pi r B_\varphi = j \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\pi r^2}{d} \omega e^{j\omega t} \quad \text{oder} \quad B_\varphi = j \mu_0 \varepsilon_0 \frac{r}{2d} \omega e^{j\omega t} .$$

Mit dieser Magnetfeldstärke ist der magnetische Fluss  $\phi$  durch die genannte Leiterschleife

$$(7) \quad \phi = \int_0^a B_\varphi h dr = j \mu_0 \varepsilon_0 h \frac{U_1}{2d} \omega e^{j\omega t} \int_0^a r dr = j \mu_0 \varepsilon_0 \frac{h a^2}{4d} U_1 \omega e^{j\omega t},$$

und die in der Leiterschleife induzierte Spannung  $U_2$

$$(8) \quad U_{IND} = U_2 e^{j\omega t} = -\frac{d\phi}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{h a^2}{4d} U_1 \omega^2 e^{j\omega t}.$$

Mit  $\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2$  und  $\omega = 2\pi f$  folgt

$$(9) \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{\pi^2 h a^2}{c^2 d} f^2.$$

Diese Gleichung wird von Sanyal und Chakrabarty<sup>1</sup> unter der Nummer (5) angegeben.

In ihrem Experiment war  $h = d/2$  und  $a = 0,102$  m, so dass der Faktor vor  $f^2$  den Wert  $55 \cdot 10^{-8}/\text{MHz}^2$  hatte. Für  $f = 5$  MHz und  $(U_1)_{pp} = 20$  V<sub>pp</sub> wäre demnach als induzierte Spannung  $(U_2)_{pp} = 0,28$  mV<sub>pp</sub> erwartet worden. Gemessen wurde 30,4 mV<sub>pp</sub>, also ein etwa 100-fach größerer Wert.

#### 4. Eigene Messungen

Die höchste Frequenz, die mein HF-Generator erzeugt, beträgt 5 MHz. Bei einer Kondensatorspannung von  $(U_1)_{pp} = 20$  V<sub>pp</sub> wären daher die genannten 0,28 mV<sub>pp</sub> als maximaler Messeffekt nachzuweisen gewesen. Um diesen wenigstens etwas anzuheben, halbiere ich – bei unveränderter Höhe  $h$  der Leiterschleife – den Plattenabstand  $d$  des Kondensators. Nach Gleichung (9) verdoppelt das die gemessene Spannung auf  $(U_2)_{pp} = 0,56$  mV<sub>pp</sub>. Abbildung 2 zeigt das nach dieser Änderung im Oszilloskop sichtbare  $(U_2)_{pp}$ -Signal. Es ist stark verrauscht und enthält Oberwellen, ist also kaum auswertbar. Aus den Umrissen der verrauschten Sinuskurve könnte man eine Spannung von etwa 0,5 mV<sub>pp</sub> ( $\pm 1$  mV<sub>pp</sub>) herauslesen. Das heißt, die Größenordnung des Signals ist offenbar richtig, die quadratische Abhängigkeit der Spannung  $U_2$  von der Frequenz (bei konstantem  $U_1$ ) wäre aber nicht nachweisbar gewesen.

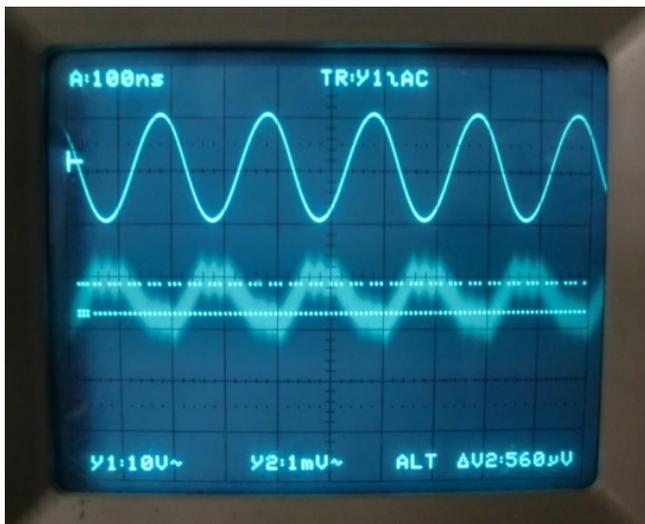


Abbildung 2 Zeitlicher Verlauf der Induktionsspannung  $U_2$  ( $y_2$ , unten) und der Spannung  $U_1$ , die am Kondensator anliegt ( $y_1$ , oben). Die Frequenz ist 5 MHz, die Schwingungsdauer also 200 ns, wie angezeigt.  $U_2$  enthält Oberwellen und ist stark verrauscht. Gemessen wird  $(U_2)_{pp} \approx 560$   $\mu\text{V}_{pp}$ , die Theorie ergibt 590  $\mu\text{V}_{pp}$ .

Während des Experimentierens stelle ich per Zufall fest, dass sich die induzierte Spannung  $U_2$  (der Messeffekt) vergrößert, wenn man der gesamten Anordnung eine Metallplatte nähert. Ich bringe deshalb in etwa 1 cm Höhe über der oberen Platte des Kondensators eine weitere mit Kupfer

kaschierte Platine an, deren Kupferschicht geerdet wird. Die Spannung  $U_2$  für  $f = 5$  MHz steigt daraufhin auf das etwa 10-fache gegenüber dem oben genannten Wert an.

**Tabelle**

In der Leiterschleife zwischen den Platten des Kondensators induzierte Spannung  $U_2$  als Funktion der Frequenz  $f$  der an den Platten anliegenden Spannung  $(U_1)_{pp} = 20$  V<sub>pp</sub>. Der kreisförmige Kondensator hat den Radius  $a = 0,1$  m, Plattenabstand  $d$  und Höhe  $h$  der Leiterschleife betragen  $d = h = 0,02$  m.

f/MHz	f <sup>2</sup> /MHz <sup>2</sup>	(U <sub>2</sub> ) <sub>pp</sub> /mV <sub>pp</sub>
1,0	1,00	0,5 ± 0,1
1,5	2,25	0,8 ± 0,1
2,0	4,00	1,3 ± 0,2
2,5	6,25	1,8 ± 0,2
3,0	9,00	2,5 ± 0,3
3,5	12,25	3,5 ± 0,3
4,0	16,00	4,5 ± 0,4
4,5	20,25	5,8 ± 0,5
5,0	25,00	6,5 ± 0,6
5,2	27,04	7,0 ± 0,6

Mit dieser Anordnung messe ich für  $(U_1)_{pp} = 20$  V<sub>pp</sub> die in der Tabelle aufgeführten Werte von  $U_2$ . Sie bestätigen die theoretisch vorhergesagte quadratische Abhängigkeit der Spannung  $U_2$  von der Frequenz  $f$ : Trägt man  $(U_2)_{pp}$  als Funktion von  $f^2$  auf, erhält man die in Abbildung 3 gezeigte Gerade. Ihre Steigung ist  $0,26$  mV<sub>pp</sub>/MHz<sup>2</sup>. Das ist in der Tat etwa das 10-fache des theoretischen Werts für einen Kondensator mit dem Radius  $a = 0,1$  m und  $h = d$ . Der theoretische Wert der Steigung beträgt nach Gleichung (9)  $(U_2)_{pp}/f^2 = (\pi a/c)^2 \cdot (U_1)_{pp} = 0,022$  mV<sub>pp</sub>/MHz<sup>2</sup>.

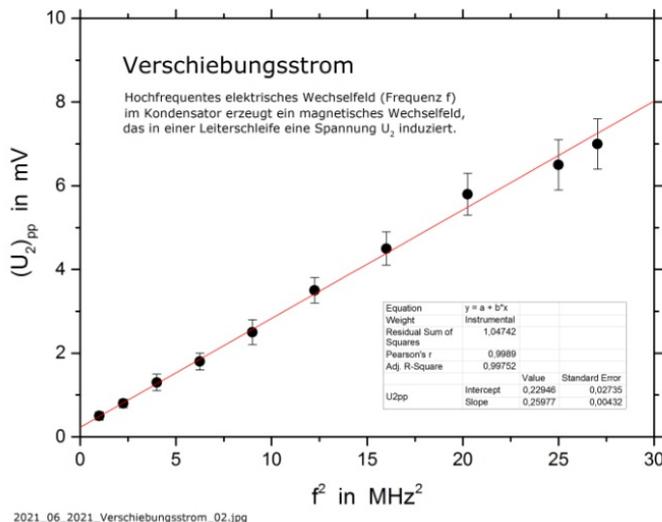


Abbildung 3 Die in der Leiterschleife zwischen den Kondensatorplatten induzierte Spannung (Spitze-Spitze-Wert  $(U_2)_{pp}$ ) als Funktion des Quadrats der Frequenz  $f$ . Die Messpunkte liegen auf einer Geraden gemäß Gleichung (9) des Textes. Die best-angepasste Gerade geht allerdings nicht exakt durch den Nullpunkt. Ihre Steigung ist größer als der theoretisch berechnete Wert, siehe Text.

Mein Experiment mit der hinzugefügten Extra-Metallplatte liefert demnach dasselbe Ergebnis wie das von Sanyal und Chakrabarty<sup>1</sup>:  $U_2$  ist proportional zu  $f^2$ , jedoch ist der Proportionalitätsfaktor um eine Größenordnung (bei Sanyal und Chakrabarty sind es zwei Größenordnungen) größer als theoretisch berechnet. Sanyal und Chakrabarty geben in ihrer Arbeit eine Reihe plausibler Gründe dafür an. Offenbar werden Spannungen in Bereichen außerhalb der im Kondensator befindlichen Leiterschleife induziert. Welche Effekte aber tatsächlich in das Messergebnis eingehen, müsste noch untersucht werden. Insofern hat mein Experiment keine neuen Erkenntnisse gebracht – leider. Ob es sich als direkten Nachweis des Verschiebungsstroms eignet, ist also fraglich.

## Literatur

<sup>1</sup> G.S. Sanyal und Ajay Chakrabarty: A Direct Experimental Proof of Displacement Current. *Resonance* **volume 13**, pages 1065–1073 (2008) , <https://doi.org/10.1007/s12045-008-0126-6>