

1. Condon's Experiment

Eine interessante Anwendung der Theorie gekoppelter Schwingungen wurde vor etwa 70 Jahren von E. U. Condon (in Zusammenarbeit mit P.E. Condon) vorgestellt¹ – das Problem geht offenbar zurück auf eine noch ältere Arbeit von Lord Kelvin². Es ging um die Frage, in welcher Weise der Gang einer Taschenuhr durch Schwingungen ihres Gehäuses beeinflusst wird. Ein entsprechendes Experiment sollte darüber Aufschluss geben. Das bestand darin, die Uhr mit ihrem Gehäuse flach auf einen beweglichen (Dreh-)Teller zu legen und deren Gang mit dem zu vergleichen, den sie auf einer unbeweglichen Unterlage zeigt. Der Drehteller war um eine vertikale Achse drehbar, so dass das Uhrengehäuse und der Ring der Unruh im Uhrwerk Torsionsschwingungen um parallele Achsen vollführten. Gehäuse (einschließlich Drehteller) und Unruh sind durch die Spiralfeder gekoppelt, die das Rückstellmoment für den Unruhring liefert. Sie ist mit dem Gehäuse verbunden. Da der Drehteller schwingungstechnisch mit dem Gehäuse eine Einheit bildet, werden im Folgenden Gehäuse und Drehteller unter der Bezeichnung „Gehäuse“ zusammengefasst.

Die Anordnung stellt ein System gekoppelter Drehpendel dar, die sich in ihrem Trägheitsmoment ungewöhnlich stark unterscheiden: die (relative) Differenz der Trägheitsmomente zwischen Unruhring und Gehäuse ist von der Größenordnung 10^{-4} . Das Rückstellmoment des Drehtellers und das Trägheitsmoment des Gehäuses wurden so gewählt, dass die Frequenz der Gehäuse-Schwingung in etwa gleich der Eigenfrequenz der Unruh war (Mit Eigenfrequenz ist wie üblich die Frequenz der freien Schwingung gemeint, ohne Kopplung an den jeweils andern Körper). Für eine Feinjustierung wurden an dem Drehteller radial nach außen gerichtete Gewindestutzen angebracht, auf denen Muttern hin- und her geschraubt werden konnten.

Gemessen wurde die Frequenz der Uhrenschwingung (der Gang der Uhr) in Abhängigkeit von der Frequenz der freien Schwingung von Gehäuse bei stillstehender Uhr, und zwar vorzugsweise in der Umgebung der Eigenfrequenz der Unruh. Dabei wurde die Frequenz der Gehäuse-Schwingung durch Verdrehen der Muttern auf den Gewindestutzen des Tellers variiert.

Die Theorie ergibt, dass die Bewegung gekoppelter Pendel aus synchronen Schwingungen der beiden Pendelkörper zusammengesetzt werden kann. Das sind die bekannten „Normalschwingungen“ oder „Normalmoden“. Im vorliegenden Fall (zwei Pendelkörper), gibt es zwei Normalschwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen, die einer *gleichphasigen* bzw. *gegenphasigen* Bewegung der Körper entsprechen. Interessant sind diese Schwingungen, wenn beide Pendelkörper die gleiche Eigenfrequenz haben oder der eine Körper in der Nähe der Eigenfrequenz des andern schwingt.

Das Ergebnis des Experiments von Condon ist, dass der Gang der Uhr in der Tat durch die Kopplung zwischen Unruhring und Gehäuse beeinflusst wird. Das heißt, es gibt Abweichungen im Gang der Uhr von der Zeit, die gemessen wird, wenn das Gehäuse gegen Drehung fixiert ist. Und zwar so, dass die Uhr schneller geht, wenn die Eigenfrequenz des Gehäuses kleiner ist als die der Unruh, und dass sie langsamer geht, wenn die Gehäuse-Eigenfrequenz größer als die der Unruh ist. Der Verlauf der gemessenen Gangdifferenz, aufgetragen als Funktion der Gehäuse-Frequenz, entspricht genau dem, den man bei einer Kopplung von zwei Schwingungen erwartet: Es gibt eine Kurve, die der Normalschwingung bei gegenphasiger Bewegung entspricht (das ist die mit der höheren Frequenz), und eine Kurve, die der Normalschwingung bei gleichphasiger Bewegung zugeordnet werden kann (also der mit der niedrigeren Frequenz). Und zwar liegen die Messpunkte bei Frequenzen unterhalb der Eigenfrequenz der Unruh auf der Kurve für die gegenphasige Bewegung, bei Frequenzen oberhalb der Eigenfrequenz auf der Kurve für die gleichphasige Bewegung. Abbildung 1 ist eine Nachzeichnung des entsprechenden Diagramms in Condon's Arbeit¹.

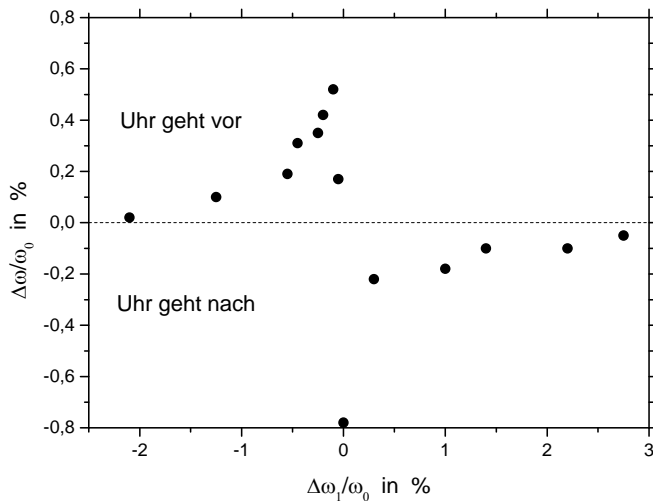


Abbildung 1 Nachzeichnung der Fig. 1 von Condon¹: „Fractional change in rate of watch as a function of the fractional departure of the oscillation frequency of the mount from synchronism with the undisturbed balance wheel“ (Übersetzungshilfe s. Anhang A).

Als Erklärung für diese Beobachtung wird angegeben: Es wird diejenige Normalschwingungsmode angeregt, bei der das Gehäuse mit geringerer Amplitude schwingt. Wegen des großen Trägheitsmoments des Gehäuses relativ zum Unruhring ist der Antriebsmechanismus, der die Drehmomente überträgt, in diesem Fall effektiver als bei der Anregung der jeweils anderen Mode. Außerdem wird darauf hingewiesen, dass die Dämpfung der beiden Moden davon abhängt, ob das Gehäuse unterhalb oder oberhalb der Eigenfrequenz der Unruh schwingt.

2. Eigene Anordnung

Das Condon'sche Uhrenexperiment faszinierte mich, als ich vor Jahren zum ersten Mal davon erfuhr. Jetzt, nach langer Zeit, ein bescheidener Versuch, die Physik des Experiments nachzuvollziehen – soweit das mit einfachen Mitteln möglich ist. Meine Idee: ein Modell-experiment mit zwei durch eine Spiralfeder gekoppelten Fadenpendeln. Eins dieser Pendel hat einen Pendelkörper von vergleichsweise kleiner Masse und wird durch eine elektromagnetische Schaltung³ entdämpft. Dieses Pendel schwingt mit konstanter Amplitude und stellt die „Uhr“ dar. Der Körper des zweiten Pendels hat eine vergleichsweise große Masse, er bildet das „Gehäuse“. Die Kopplung durch die Spiralfeder darf nur lose sein, eine selbst gewickelte Feder aus dünnem Eisendraht genügt. Abbildung 2 zeigt den Aufbau des Fadenpendel-Versuchs schematisch, Abbildung 3 ist ein Foto der Anordnung.

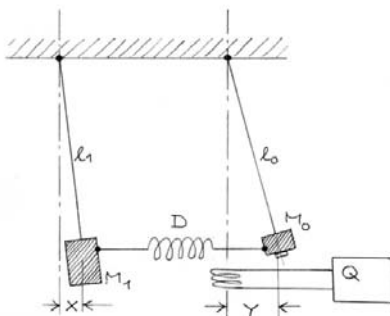


Abbildung 2 Eigene Anordnung schematisch. Q: Elektronik zur Entdämpfung(s.Text)

Zunächst ging es darum, Erfahrungen im Umgang mit dem Doppelpendel zu sammeln, das heißt, die beiden Normalschwingungen überhaupt anzuregen und danach über längere Zeit aufrecht zu erhalten. Dazu wurden in einem Vorversuch Pendelkörper mit *gleicher* Masse verwendet – das ist die Anordnung, die in den meisten Lehrbüchern behandelt wird. Die Vorrichtung zur Entdämpfung war in dieser Anordnung nicht in Betrieb. Es war nicht einfach, die Anfangsauslenkungen der beiden Pendel so genau zu treffen, dass sich eine der beiden Normalmoden herausbildete. Offenbar war dabei mehr Zufall als experimentelles Geschick im Spiel. Einige der Schwingungen, die anfangs wie Normalmoden aussahen, gingen nach kurzer Zeit in „gemischte“ Schwingungen über. Konnte man eine Normalmode über längere Zeit verfolgen, wurde deren Schwingungsdauer mit der Stoppuhr gemessen. In der Regel wurden dazu 20 Schwingungen ausgezählt. Wiederholte Messungen ergaben, dass die Frequenz einer Mode mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 0,4\%$ angegeben werden konnte.

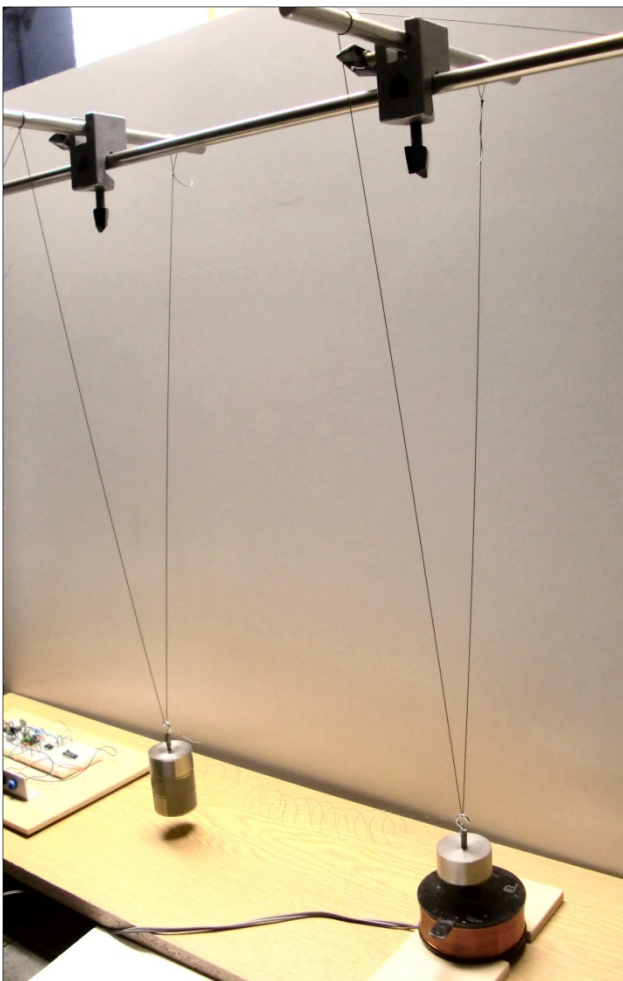


Abbildung 3 Foto des Versuchsaufbaus. Uhren-Pendel rechts, Gehäuse-Pendel links. Bei genauem Hinsehen ist die Kopplungsfeder erkennbar. Die Spule unter dem Uhren-Pendel rechts erzeugt beim Durchgang des Pendels kurzzeitig ein Magnetfeld. Das wirkt auf einen kleinen Magneten unter dem Pendelkörper und stößt diesen an. Dadurch wird das Pendel entdämpft. Links im Hintergrund (nur zum Teil sichtbar) die dazugehörige Elektronikschaltung.

Die Fadenlänge der Pendel betrug etwa 0,5 m, so dass Schwingungsdauern von der Größenordnung 0,7 Hz gemessen wurden. Die Länge eines der beiden Pendel (l_0) blieb während der Messung konstant. Sie betrug $l_0 = 0,535$ m, entsprechend einer Eigenfrequenz $f_0 = 0,6815$ Hz. Die Länge des

anderen Pendels (l_1) wurde variiert, und zwar um maximal $\pm 1,5\%$ gegenüber l_0 . Die Pendelkörper hatten jeder eine Masse von 0,405 kg und die Kopplungsfeder bestand aus etwa 1,20 Meter 0,2 mm Eisendraht, der zu einer Spirale mit 14 Windungen und ca. 2 cm Durchmesser gewickelt wurde. Ihre Federkonstante betrug $D = 0,063$ N/m. Gemessen wurden die Frequenzen der beiden Normalmoden in Abhängigkeit von der Frequenz des Pendels mit der variablen Länge (f_1). Das

f_1 / Hz	$f_{(\text{gleichphase})}$ / Hz	$f_{(\text{gegenphase})}$ / Hz
0,6780	$0,6768 \pm 0,0030$	$0,6849 \pm 0,0035$
0,6803	$0,6838 \pm 0,0025$	0,6873
0,6826	$0,6807 \pm 0,0012$	$0,6857 \pm 0,0012$
0,6849	$0,6849 \pm 0,0020$	$0,6897 \pm 0,0023$
0,6772	0,6764	0,6844
0,6785	0,6783	0,6855
0,6832	0,6807	0,6881
0,6842	0,6787	0,6867
0,6817	$0,6812 \pm 0,0024$	$0,6873 \pm 0,0024$

Tabelle 1 Frequenzen der Normalschwingungen eines Systems gekoppelter Fadenpendel (Vorversuch, siehe Text)

Ergebnis ist in Tabelle 1 aufgeführt und in Abbildung 4 als Diagramm dargestellt. Gefüllte Kreise bezeichnen die Frequenzen der gegenphasigen Mode, offene Kreise die der gleichphasigen Mode. In die Abbildung wurden auch die theoretischen Kurven⁴ eingetragen. Es zeigt sich, dass die Punkte in etwa dem theoretischen Verlauf folgen. Allerdings wären kleinere Fehlerbalken wünschenswert.

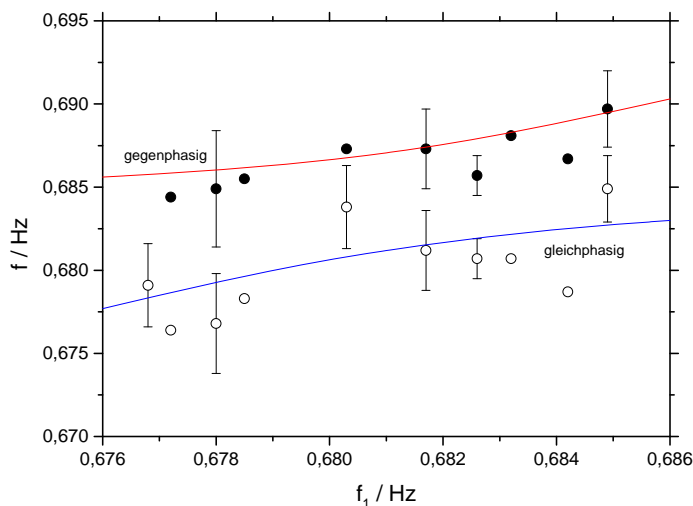


Abbildung 4 Frequenzen f der Normalschwingungen eines Systems gekoppelter Pendel (Vorversuch), in Abhängigkeit von der Eigenfrequenz f_1 eines der beiden Pendel (s. Text). Massen der beiden Pendelkörper 0,405 kg, Federkonstante der Kopplungsfeder 0,063 N/m.

3. Versuch einer Simulation

Das eigentliche Experiment wurde in der endgültigen Anordnung nach Abbildung 2 durchgeführt, das heißt, mit unterschiedlichen Pendelmassen und eingeschalteter Entdämpfungselektronik. Das Verhältnis der Pendelmassen betrug jetzt 3:1, größere Werte waren nicht zu realisieren. Wegen

dieses vergleichsweise geringen Massenverhältnisses ist es zwar unwahrscheinlich, dass sich das von Condon beobachtete Verhalten der Uhr auch in unserer Fadenpendel-Simulation einstellt (Im Fall der Uhr betrug das Massenverhältnis 10000 : 1). Aber das sollte kein Grund dafür sein, das Experiment nicht auszuführen. Es wurde also ein entdämpftes „Uhrenpendel“ mit einer

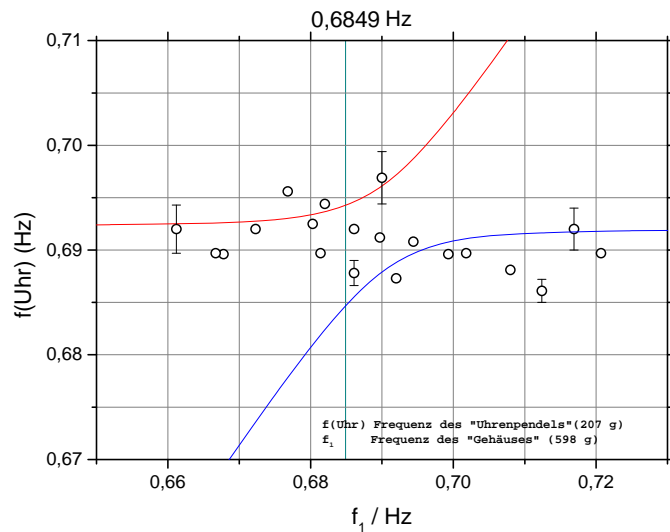


Abbildung 5 Gekoppelte Fadenpendel als Modell des Systems Uhr/Gehäuse. Aufgetragen ist die Frequenz $f(\text{Uhr})$ des Pendels mit der kleineren Masse (Uhr) als Funktion der Frequenz f_1 des Pendels mit der größeren Masse (Gehäuse). Die Messpunkte in der Umgebung der Eigenfrequenz der Uhr (0,6849 Hz) zeigen keine Bevorzugung einer der beiden Normalschwingungen.

Eigenfrequenz $f_0 = 0,6864$ Hz mit einem „Gehäuse“-Pendel gekoppelt, dessen Frequenz f_1 zwischen 0,66 und 0,72 Hz variiert wurde. Die Massen der Pendelkörper betragen $M_0 = 0,207$ kg („Uhr“) bzw. $M_1 = 0,598$ kg („Gehäuse“), und die Kopplungsfeder hatte die Federkonstante $D = 0,62$ N/m. Gemessen wurde die „Uhrenfrequenz“ (f) als Funktion der „Gehäusefrequenz“ f_1 , wobei *nicht* protokolliert wurde, ob sich die Pendel in einer der Normalmoden oder einer „gemischten“ Mode bewegten. Die „Gehäusefrequenz“ f_1 wurde dabei, wie im Vorversuch, in der Nähe der Eigenfrequenz f_0 der Uhr variiert. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5. Dass der Verlauf der Messpunkte in keiner Weise mit dem in Fig. 1 der Arbeit von Condon¹ (Abbildung 1) übereinstimmt, ist evident. Zwar scheint auch unsere „Uhr“ für Frequenzen $f_1 < f_0$ schneller zu gehen als im Fall $f_1 > f_0$, aber dies ist in Abbildung 5 allenfalls als Trend zu erkennen. Auch eine Häufung von Punkten in der Nähe der beiden theoretischen Kurven lässt sich nicht feststellen.

Nach diesem eher negativen Befund wurde das vorhin beschriebene Experiment wiederholt – mit der Einschränkung, dass Daten nur dann protokolliert wurden, wenn das System deutlich erkennbar eine der beiden Normalschwingungen ausführte. Die Pendelmassen waren unverändert $M_0 = 0,207$ kg („Uhr“) bzw. $M_1 = 0,598$ kg („Gehäuse“), und die Federkonstante der Kopplungsfeder betrug

f_1 / Hz	$f_{\text{gegenphase}}$ / Hz	f_1 / Hz	$f_{\text{gleichphase}}$ / Hz
0,6593	0,6867	0,6803	$0,6811 \pm 0,0006$
0,6742	$0,6869 \pm 0,0006$	0,6849	0,6820
0,6803	0,6903	0,6901	0,6842
0,6849	0,6897	0,6928	$0,6846 \pm 0,0006$
0,6861	$0,6918 \pm 0,0006$	0,6975	0,6851
0,6869	0,6919	0,7084	0,6858
		0,6803	$0,6811 \pm 0,0006$

Tabelle 2 Frequenzen der angeregten Normalschwingungen (siehe Text)

wie bisher $D = 0,62 \text{ N/m}$. Das Uhrenpendel war geringfügig länger, so dass die Eigenfrequenz der „Uhr“ dieses Mal $f_0 = 0,6810 \text{ Hz}$ ($\pm 0,0007 \text{ Hz}$) betrug. Die Messdaten sind in Tabelle 2 aufgeführt und in Abbildung 6 zusammen mit den beiden theoretisch berechneten Kurven (Anhang C) dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist offensichtlich. Im Unterschied zu der (realen) Uhr von Condon ist unser System in der Lage, in der Umgebung der

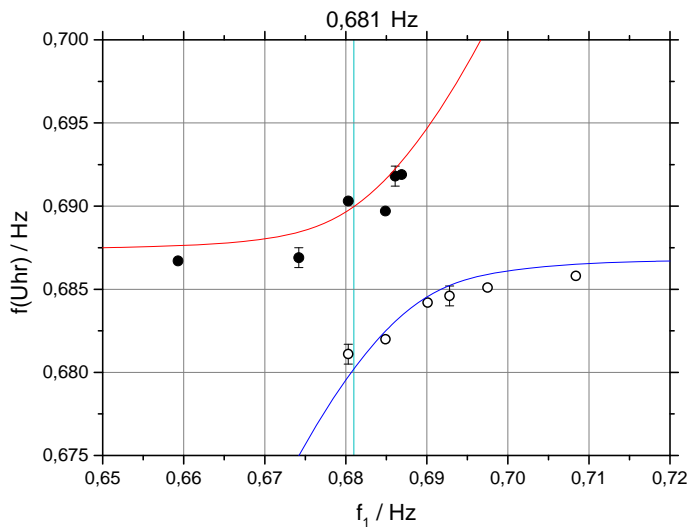


Abbildung 6 Gekoppelte Fadenpendel als Modell des Systems Uhr/Gehäuse. Die Frequenz $f(\text{Uhr})$ ist die Frequenz der jeweils angeregten Normalschwingung, sie ist aufgetragen als Funktion der Eigenfrequenz (f_1) des Pendels mit der größeren Masse (Gehäusependel). Gefüllte Kreise: gegenphasige Normalschwingung, offene Kreise: gleichphasige Normalschwingung. Die Eigenfrequenz des Pendels mit der kleineren Masse (Uhrenpendel) beträgt $0,681 \text{ Hz}$ (grüne vertikale Linie). Die beiden Kurven sind die theoretisch berechneten Frequenzen (rot: gegenphasige Normalmode, blau: gleichphasige Normalmode)

Uhrenfrequenz f_0 bei ein- und derselben Gehäusefrequenz f_1 beide Normalmoden auszuführen. Hier kann also unsere „Uhr“ sowohl vor- als auch nachgehen. Allerdings braucht sie dazu die Hilfestellung des Experimentators, der darauf achtet, dass sie in genau einer der beiden Normalmoden schwingt.

4. Schlussbemerkung

Zum Schluss nochmals der Hinweis: Der hier beschriebene Versuch ist keine Simulation des Condon'schen Uhrenexperiments. Nur die Physik ist in beiden Fällen dieselbe. Es handelt sich um selbsterregte Schwingungen zweier gekoppelter Oszillatoren. Erstaunlich ist, dass die gemessenen Frequenzen der Normalschwingungen in unserer Fadenpendel-Anordnung so gut mit den theoretischen Werten übereinstimmen (Abbildung 6).

Literatur und Anmerkungen

¹ E. U. Condon und P. E. Condon: *Effect of Oscillations of the Case on the Rate of a Watch*, A. J. Phys. 16, 14 – 16 (1948)

² Lord Kelvin: *Popular lectures and addresses*, MacMillan 1894

³ Um das Uhren-Pendel zu entdämpfen, wird auf dem Boden an der Ruheposition des Pendels eine Spule angebracht (Abbildung 3), die beim Durchgang des Pendels kurzzeitig ein Magnetfeld erzeugt. Dieses wirkt auf einen kleinen Magneten unter dem Pendelkörper und stößt diesen ab. Die dazugehörige Elektronikschaltung wurde (leicht modifiziert) der Anleitung zu einem Bausatz mit der Bezeichnung *Elektronisches Pendel* entnommen, dessen Herkunft ich heute (nach ca. 20 Jahren) nicht mehr feststellen kann. Die modifizierte Schaltung ist im Anhang B abgebildet.

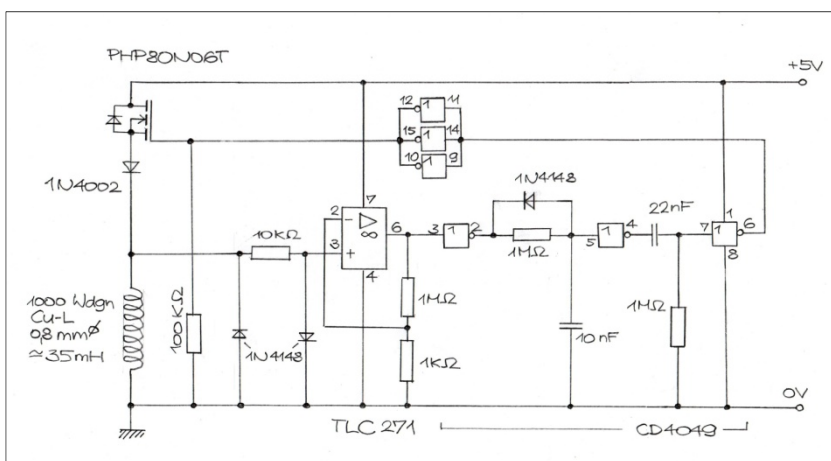
Anhang A

(Versuch einer) Übersetzungshilfe Uhrentechnik

engl.	
(watch) movement	Uhrwerk
main spring	Uhrenfeder: Spiralfeder, die aufgezogen wird, um die Energie für den Antrieb der Uhr zu liefern
going train	(Zahnrad-) Getriebe, überträgt das Drehmoment der Uhrenfeder auf das Steigrad
escapement	Uhrwerk-Hemmung
escapement wheel	Steigrad der Hemmung. Jede Schwingung der Unruh gibt einen Zahn des Steigrads frei und erlaubt so dem Getriebe der Uhr, sich um einen konstanten Drehwinkel weiter zu drehen
balance	Unruh des Uhrwerks
balance wheel	Unruhring: das „Schwungrad“, das im Uhrwerk die Drehschwingungen der Unruh ausführt, ist in der Regel ein Ring (keine Scheibe)
case	Gehäuse der Uhr
mount, holder, support	Montage, Halterung, Unterlage. Gemeint ist der Drehteller

Anhang B

Schaltung zur Entdämpfung des Uhrenpendels



Anhang C

Maple-worksheet: Rechnung zu Abbildung 6

```
> restart: with(plots):
# Daten der Messung 13.03.2018
> M0 := 0.2071 : M1 := 0.5977 : Dk := 0.0692 : l0 := 0.536 : l1 := 0.536 : g := 9.81 :
> f0 := sqrt(g/l0)/(2*Pi);
```

$$f0 := 0.6808826070$$

```
> # x ist f1
l1 := g/(4*Pi^2*x^2):
a1 := x -> g/l0 + Dk/M0 + g/l1 + Dk/M1;
a2 := x -> g^2/(l0*l1) + (g/l0)*(Dk/M1) + (g/l1)*(Dk/M0);
```

$$l1 := \frac{0.2484902028}{x^2}$$

$$a1 := x \rightarrow \frac{g}{l0} + \frac{Dk}{M0} + \frac{g}{l1} + \frac{Dk}{M1}$$

$$a2 := x \rightarrow \frac{g^2}{l0 l1} + \frac{g Dk}{l0 M1} + \frac{g Dk}{l1 M0}$$

```
> f1 := x -> sqrt((1/2)*a1(x) + sqrt((a1(x)/2)^2 - a2(x)))/(2*Pi);
```

$$f1 := x \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a1(x) + \sqrt{\frac{1}{4} a1(x)^2 - a2(x)}}}{\pi}$$

```
> f2 := x -> sqrt((1/2)*a1(x) - sqrt((a1(x)/2)^2 - a2(x)))/(2*Pi);
```

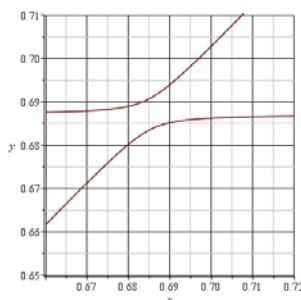
$$f2 := x \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} a1(x) - \sqrt{\frac{1}{4} a1(x)^2 - a2(x)}}}{\pi}$$

```
> limit(f2(x), x = infinity); limit(f1(x), x = 0);
```

$$0.6870698229$$

$$0.6871083215$$

```
> plf1 := plot(f1(x), x = 0.66..0.72, y = 0.65..0.71):
> plf2 := plot(f2(x), x = 0.66..0.72, y = 0.65..0.71):
> display(plf1,plf2);
```



```
> for x from 0.65 to 0.75 by 0.01 do
  printf("%10.4f %10.4f %10.4f\n", x, f1(x), f2(x));
end do;
```

```
0.6500      0.6875      0.6518
0.6600      0.6876      0.6617
0.6700      0.6879      0.6713
0.6800      0.6890      0.6802
0.6900      0.6940      0.6852
0.7000      0.7029      0.6862
0.7100      0.7126      0.6866
0.7200      0.7224      0.6867
0.7300      0.7323      0.6868
0.7400      0.7422      0.6868
0.7500      0.7521      0.6869
```