Brücken, Gebäude oder ähnliche Strukturen werden durch Wind, Verkehr oder Personen, die sich bewegen, in Schwingungen versetzt. Die Schwingungen können zu Schäden führen, so dass man versucht, sie zu unterdrücken. Dazu bedient man sich so genannter Schwingungstilger[1]. Abbildung 1 zeigt den schematischen Aufbau eines Schwingungstilgers, der nach dem Zweimassen-Prinzip arbeitet: Die Struktur wird durch die Masse m dargestellt. Sie ist mit einer Feder der Federkonstante k elastisch an einem ortsfesten Punkt befestigt. Parallel zur Feder wirkt ein Dämpfungszylinder, der eine zur Geschwindigkeit proportionale Kraft (viskose Dämpfung, Dämpfungskonstante c) auf m ausübt. Die Tilgung bewirkt eine zweite Masse m_T, die durch eine weitere Feder (Federkonstante k_T) und einen weiteren Dämpfungszylinder (Dämpfungskonstante c_T) an die Masse m der Struktur angekoppelt ist.

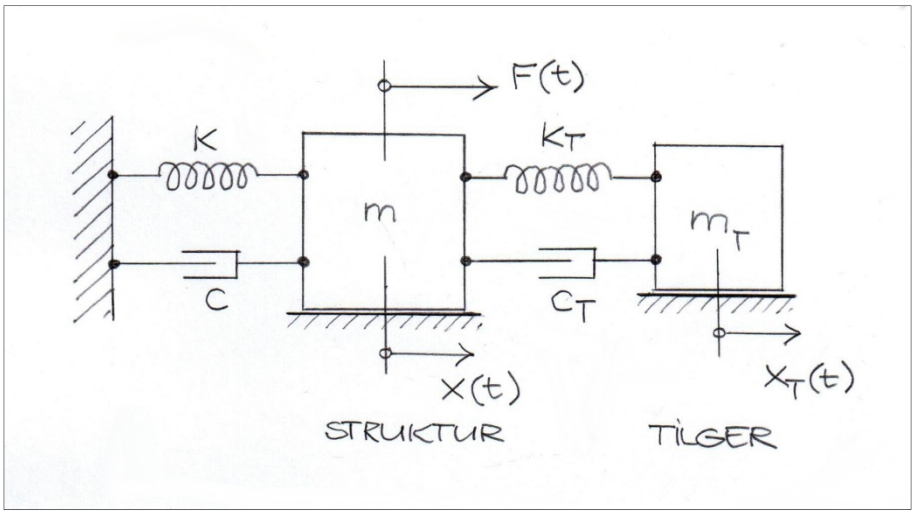

Abbildung 1 Schematischer Aufbau des Zwei-Massen-Schwingungstilgers. Die Massen von Struktur (m) und Tilger (m_T) bewegen sich auf reibungsfreien Unterlagen.

Wir berechnen mit Hilfe der Bewegungsgleichungen für die beiden Massen m und m_T, inwiefern deren Kopplung eine Dämpfung der Strukturschwingung bewirkt – und welche Parameter dabei eine Rolle spielen. Offensichtlich handelt es sich um ein Standardproblem der theoretischen Schwingungslehre, es wird in der Literatur[1] vielfach behandelt. Die nachfolgenden Zeilen sind eine Schritt-für-Schritt-Ausarbeitung der dort oft nur skizzierten (Modell-)Rechnungen. Am Ende vergleichen wir das Ergebnis unserer Rechnungen, Gleichung (8) weiter unten, mit der von Gidion[2] angegebenen Formel.

Das hier behandelte Modell betrifft den Fall, dass an der Strukturmasse m eine periodisch mit der Zeit sich ändernde Kraft $F(t)$ angreift. Wir nehmen eine harmonische Anregung mit der (Kreis-)Frequenz $\omega = 2\pi f$ (f = übliche Frequenz) an, setzen also $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ und betrachten die erzwungene Schwingung des Systems. Bezeichnen wir die Koordinaten von m und m_T mit x bzw. x_T, lauten die Bewegungsgleichungen nach *Newton*

$$(1)\qquad \begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + k_T(x_T - x) - c\dot{x} + c_T(\dot{x}_T - \dot{x}) - F_0 \sin(\omega t) \\ m_T\ddot{x}_T &= -k_T(x_T - x) - c_T(\dot{x}_T - \dot{x}) \end{aligned} \quad ,$$

wobei der Punkt wie gewohnt die Ableitung nach der Zeit bedeutet. Etwas übersichtlicher ist die Matrixschreibweise

$$(2)\qquad \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{x}_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (c + c_T) & -c_T \\ -c_T & c_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (k + k_T) & -k_T \\ -k_T & k_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin(\omega t) \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Wir betrachten den eingeschwungenen Zustand und rechnen mit komplexen Zahlen, erweitern die angreifende Kraft also zu $F(t) = F_0\, e^{i\omega t}$ und setzen als Lösungen an

$$(3) \qquad \begin{bmatrix} x \\ x_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix} e^{i\omega t} \; .$$

Das führt zu dem Gleichungssystem

$$(4) \qquad \begin{bmatrix} -\omega^2 m + i\omega(c + c_T) + (k + k_T) & -i\omega c_T - k_T \\ -i\omega c_T - k_T & -\omega^2 m_T + i\omega c_T + k_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Die Masse m der Struktur schwingt mit der Eigenfrequenz

$$(5) \qquad \omega_S = \sqrt{k / m} \, ,$$

also $k = m\,\omega_S^2$. Wir dividieren beide Seiten durch k bzw. $m\,\omega_S^2$

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\omega^2}{\omega_S^2} + i\dfrac{\omega}{\omega_S}\dfrac{1}{m\,\omega_S}(c + c_T) + (1 + \dfrac{1}{m\,\omega_S^2}k_T) & -i\omega\dfrac{1}{m\,\omega_S^2}c_T - \dfrac{1}{m\,\omega_S^2}k_T \\ -i\omega\dfrac{1}{m\,\omega_S^2}c_T - \dfrac{1}{m\,\omega_S^2}k_T & -\dfrac{\omega^2}{\omega_S^2}\dfrac{m_T}{m} + i\omega\dfrac{1}{m\,\omega_S^2}c_T + \dfrac{1}{m\,\omega_S^2}k_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 / k \\ 0 \end{bmatrix},$$

setzen $k_T = m_T\omega_T^2$ und formen um

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\omega^2}{\omega_S^2} + 2i\dfrac{\omega}{\omega_S}(\dfrac{c}{2m\,\omega_S} + \dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}\dfrac{m_T}{m}\dfrac{\omega_T}{\omega_S}) + (1 + \dfrac{m_T\omega_T^2}{m\,\omega_S^2}) & -2i\dfrac{\omega}{\omega_S}\dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}\dfrac{m_T\omega_T}{m\,\omega_S} - \dfrac{m_T\omega_T^2}{m\,\omega_S^2} \\ -2i\dfrac{\omega}{\omega_S}\dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}\dfrac{m_T\omega_T}{m\,\omega_S} - \dfrac{m_T\omega_T^2}{m\,\omega_S^2} & -\dfrac{\omega^2}{\omega_S^2}\dfrac{m_T}{m} + 2i\dfrac{\omega}{\omega_S}\dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}\dfrac{m_T\omega_T}{m\,\omega_S} - \dfrac{m_T\omega_T^2}{m\,\omega_S^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} F_0 / k \\ 0 \end{bmatrix}$$

In der Literatur führt man an dieser Stelle Abkürzungen ein, die von uns benutzten sind in Tabelle 1 aufgeführt. Sie sind weitgehend identisch mit denen von Gidion[2]. Die Ergebnisse seiner und unserer Rechnung (Gleichung (8) weiter unten) lassen sich daher bequem vergleichen.

Tabelle 1 Abkürzungen

$\mu = \dfrac{m_T}{m}$	Massenverhältnis
$\omega_S = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$	Eigenfrequenz der Struktur, wie Gl. (5)
$\omega_T = \sqrt{\dfrac{k_T}{m_T}}$	Eigenfrequenz des Tilgers
$\beta = \dfrac{\omega_T}{\omega_S}$	Verhältnis der Eigenfrequenzen
$r = \dfrac{\omega}{\omega_S}$	Verhältnis der Anregungs- zur Eigenfrequenz der Struktur
$\zeta_T = \dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}$	Dämpfungsrate des Tilgers (ζ = »Zeta«)
$\zeta_S = \dfrac{c}{2m\,\omega_S}$	Dämpfungsrate der Struktur
$\zeta = \beta\dfrac{c_T}{2m_T\omega_T}$	Kurzform $\zeta = \beta\zeta_T$, modifizierte Dämpfungsrate, siehe Gidion[2]
$X_0 = \dfrac{F_0}{k}$	Statische Koordinate der Struktur

Mit den Abkürzungen der Tabelle 1 wird unser Gleichungssystem

$$(6)\qquad \begin{bmatrix} -r^2+2ir(\zeta_S+\mu\beta\zeta_T)+(1+\mu\beta^2) & -2ir\mu\beta\zeta_T-\mu\beta^2 \\ -2ir\mu\beta\zeta_T-\mu\beta^2 & -r^2\mu+2ir\mu\beta\zeta_T+\mu\beta^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung lassen wir von *Maple* berechnen:

$$\begin{bmatrix} X \\ X_T \end{bmatrix} = X_0 \begin{bmatrix} \dfrac{(\beta^2-r^2)\ -\ 2i\beta r\zeta_T}{\left[(\beta^2-r^2)-\beta^2r^2(1+\mu)+r^2(r^2-4\beta\zeta_S\zeta_T)\right]+2ir\left[(\beta^2-r^2)\zeta_S+(1-r^2(1+\mu))\beta\zeta_T\right]} \\ \dfrac{\beta^2\ +2ir\beta\zeta_T}{\left[(\beta^2-r^2)-\beta^2r^2(1+\mu)+r^2(r^2-4\beta\zeta_S\zeta_T)\right]+2ir\left[(\beta^2-r^2)\zeta_S+(1-r^2(1+\mu))\beta\zeta_T\right]} \end{bmatrix}.$$

Von Interesse ist der Betrag von X/X_0. Auch hier kommt uns *Maple* zu Hilfe:

$$(7)\qquad \left|\frac{X}{X_0}\right| = \sqrt{\frac{(\beta^2-r^2)^2+(2r\beta\zeta_T)^2}{\left[(\beta^2-r^2)-\beta^2r^2(1+\mu)+r^2(r^2-4\beta\zeta_S\zeta_T)\right]^2+4r^2\left[(\beta^2-r^2)\zeta_S+(1-r^2(1+\mu))\beta\zeta_T\right]^2}}$$

Vielfach wird der Sonderfall $\zeta_S = 0$ (keine Strukturdämpfung) betrachtet. Dann vereinfacht sich die Formel zu

$$(8) \qquad \left|\frac{X}{X_0}\right| = \sqrt{\frac{(\beta^2 - r^2)^2 + (2r\beta\zeta_T)^2}{(\beta^2 r^2 \mu - (r^2 - \beta^2)(r^2 - 1))^2 + (2r\beta\zeta_T)^2(1 - r^2 - \mu r^2)^2}} \; .$$

Sie entspricht Gleichung (2.16) bei Gidion[2], wenn man $\zeta = \beta\zeta_T$ beachtet. Der Betrag von X/X_0 stellt die Amplitude X der zu dämpfenden Struktur dar, ausgedrückt in der Einheit der statischen Auslenkung X_0 bei Einwirkung von F_0, also $X_0 = F_0/k$. Sein Verlauf als Funktion der Anregungsfrequenz r (r in Einheiten der Eigenfrequenz ω_S der Struktur, also $r = \omega/\omega_S$ wie in Tabelle 1) heißt in der Literatur »Amplitudenfrequenzgang« oder auch »dynamische Vergrößerungsfunktion«. Gidion[2] stellt in seiner Arbeit den Amplitudenfrequenzgang für einige Dämpfungsparameter ζ_T des Tilgers dar. Abbildung 2 zeigt die entsprechenden, von uns mit *Maple* erhaltenen Kurven. Sie stimmen mit den von Gidion[2] berechneten überein. Wir sind also sicher, dass unser *Maple*-Programm korrekt rechnet.

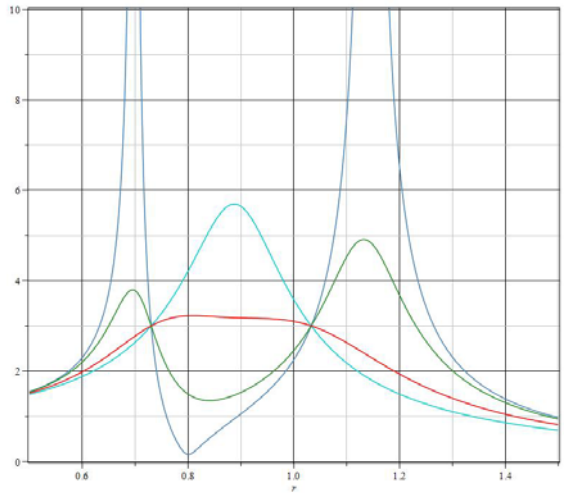

Abbildung 2 Amplitude X der zu dämpfenden Struktur (in der Einheit der statischen Auslenkung $X_0 = F_0/k$), als Funktion der Anregungsfrequenz r (r ist die Anregungsfrequenz ω dividiert durch die Eigenfrequenz der Struktur, also $r = \omega/\omega_S$). Die Kurven wurden für diejenigen Werte des Tilger-Dämpfungsparameters ζ_T berechnet, die auch Gidion[2] in seiner Abbildung 2.26 benutzt. Unsere mit Maple berechneten Kurven stimmen mit denen von Gidion[2] dargestellten überein: unsere Maple-Routine rechnet also korrekt. Die rote Kurve ist vermutlich der Amplitudenverlauf für optimale Dämpfung.

Die Schwingungstilgung nach dem Zwei-Massen-Verfahren wurde von Den Hartog schon früh und umfassend untersucht[3]. Den Hartog gibt für den Fall ungedämpfter Strukturen als optimale Tilgerparameter an

$$(9) \qquad \beta_{opt} = \left(\frac{\omega_T}{\omega_S}\right)_{opt} = \frac{1}{1+\mu} \qquad \text{und} \qquad \zeta_{T,opt} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} \; .$$

Diese Werte sind lt. Literatur auch für schwach gedämpfte Strukturen gute Näherungen.

Als Massenverhältnis wählen wir $\mu = 0{,}05$. Diesen Wert benutzt auch Adam[4] in Beispielrechnungen. Mit $\mu = 0{,}05$ erhält man nach Gleichung (9) die Werte $\beta_{opt} = 0{,}9524$ und $\zeta_{T,opt} = 0{,}1273$. Abbildung 3 zeigt den Amplitudenfrequenzgang für das Massenverhältnis $\mu = 0{,}05$ und die optimale Tilger-Eigenfrequenz $\beta_{opt} = 0{,}9524$ (β_{opt} in Einheiten der Strukturfrequenz), und zwar für verschiedene Dämpfungskoeffizienten des Tilgers ζ_T. Der ungedämpfte Tilger ($\zeta_T = 0$) unterdrückt für $r = 0{,}9524$ die Strukturschwingung vollständig, liefert aber zwei Amplitudenpeaks unter- und oberhalb dieser Anregungsfrequenz (graue Kurve). Er ist also unbrauchbar. Im anderen Extrem, das heißt für große Werte des Dämpfungsparameters ($\zeta_T \to \infty$), wird die Schwingung der Struktur überhaupt nicht

unterdrückt: Der Tilger ist praktisch starr mit der Struktur gekoppelt, und der Amplitudenfrequenzgang hat nur einen Peak – und zwar bei der schon genannten Frequenz r = 0,9524 (stahlblaue Kurve). Die Abbildung enthält außerdem Kurven für drei Werte ζ_T zwischen den Extremen. Die rote Kurve entspricht dem optimalen Wert $\zeta_{T,opt}$ = 0,1273. Für diesen ist die Amplitude X in den beiden Spitzen das 6,4-fache der statischen Auslenkung $X_0 = F_0/k$. Die grüne Kurve entspricht ζ_T = 0,2, die gelbe Kurve dem Wert ζ_T = 0,1.

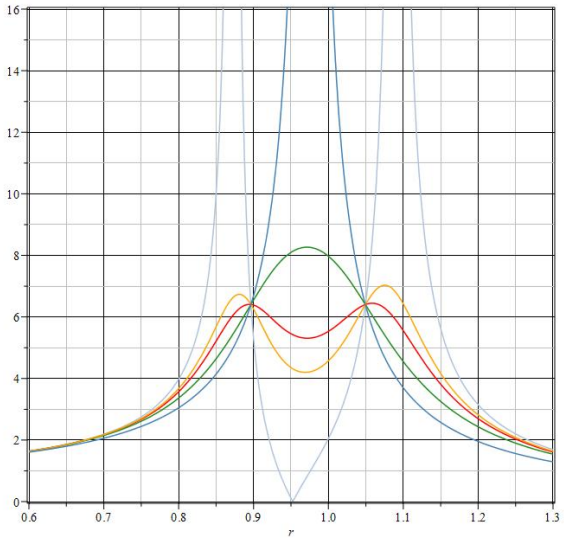

Abbildung 3 Amplitude X der zu dämpfenden Struktur (in der Einheit der statischen Auslenkung $X_0 = F_0/k$), als Funktion der Anregungsfrequenz r (r ist die Anregungsfrequenz ω dividiert durch die Eigenfrequenz der Struktur, also $r = \omega / \omega_S$). Die Kurven wurden für verschiedene Werte des Tilger-Dämpfungsparameters ζ_T berechnet, unter ihnen der Wert für den optimalen Koeffizienten ζ_T = 0,1273 (rote Kurve). Berechnung mit Hilfe von Maple.

Unser Schwingungstilger-Modell liefert zwar beeindruckende Ergebnisse, sollte aber nicht überschätzt werden. Es setzt voraus, dass auf die zu Schwingungen neigende Struktur eine schmalbandige, harmonische Kraft einwirkt. Diese gibt es in der realen Welt praktisch nicht. Insofern bleiben unsere Rechnungen Theorie. Trotzdem hat das Modell seine Bedeutung: Es zeigt, dass man durch eine (elastische und viskos gedämpfte) Kopplung zweier Massen Schwingungen unterdrücken kann, wenn man die Kopplungsparameter sorgfältig aufeinander abstimmt.

Anmerkungen und Literatur

[1] Literatur zur Schwingungstilgung nach dem Zwei-Massen-Verfahren findet man zum Beispiel bei Dazio, A.: *Tragwerksdynamik und Schwingungsprobleme*, Teil 2 (TD_SP_HS09_Teil_1_DS.pdf) https://www.yumpu.com/de/document/view/22441317/teil-2-td-sp-hs09-teil-1-ds.pdf

[2] Gidion, G.: *Akustische Resonatoren zur Analyse und Kontrolle von Schwingungsfähigen Systemen am Beispiel von Streichinstrumenten und Dielektrischen Elastomeraktoren*, https://publishup.uni-potsdam.de › index › index › docId

[3] Den Hartog, J. P.: *Mechanical Vibrations*. ISBN 0-486-64785-4. Dover Publications, 1985 (Nachdruck der 4. Auflage von 1956)

[4] z. B. Adam, Ch.: *Tilgungsmechanismen zur Reduktion unerwünschter Gebäudeschwingungen*, Österr. Ingenieur- und Architekten-Zeitschrift, 154, S. 93 (2009) https://www.researchgate.net/publication/275657697_Tilgungsmechanismen_zur_Reduktion_unerwunschter_Gebaudeschwingungen

Bezeichnungen in dieser Arbeit

m	Masse der Struktur
m_T	Masse des Tilgers
k	Federkonstante der Feder zwischen Struktur und Befestigungspunkt
k_T	Federkonstante der Feder zwischen Tilger und Struktur
c	Dämpfungskonstante des Dämpfers der Struktur
c_T	Dämpfungskonstante des Dämpfers zwischen Tilger und Struktur
$F(t)$	an der Struktur angreifende Kraft $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$
F_0	Amplitude der an der Struktur angreifenden Kraft
f	Frequenz, mit der $F(t)$ sich zeitlich ändert (Erregerfrequenz)
ω	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ der Erreger-Schwingung
ω_S	(Eigen-)Kreisfrequenz der Schwingung der Struktur
ω_T	(Eigen-)Kreisfrequenz der Schwingung des Tilgers
X	Amplitude der erzwungenen Schwingung der Struktur
X_0	Statische Auslenkung der Struktur für $F = F_0/k$